

教育研究報告

自主教材による数学の指導例 その 2

矢 谷 良 幸*

An Example of Teaching Mathematics with Self-made Textbooks Part 2

Yoshiyuki YATANI*

1. 初めに

前に自分で作った教材を用いて行った授業について述べた(本校紀要第 14 巻第 1 号, 1998 年 9 月)。

そこでは 1 年生についてのものを書いたが, ここでは 2 年生のものについて述べる。

なお, 1 年生のものは

第 1 巻 数と式

第 2 巻 方程式と不等式

第 3 巻 平面の図形

第 4 巻 関数とグラフ

第 5 巻 場合の数と数列

である。

2 年生のは

第 6 巻 図形とベクトル

第 7 巻 極限と連続

第 8 巻 微分

第 9 巻 積分

としている。

もっとも 1 年生の所が予定通りに進まず, 残ることが多いので, 実際の授業では残った分が 2 年生に回り, 2 年生で残った分が 3 年生に回ることになる。また, 教材とともに教科書も随時使う。

2. 教材の主な特徴

前回に述べたように, 色々な命題や公式を導く過程を重視する。また, なぜそうなるのかという理由を, 2 年生に理解できる範囲で述べる。つまり系統性と論証を重視する。

一方で, 理解した後, それが使えるように十分練習することが必要であるから, 問や練習問題を多く入れている。数学以外の分野, たとえば物理などへの応用問題もできるだけ入れるようにした。

3. 個々の部分の特徴

各巻の特徴を述べる。

3.1 第 6 巻 図形とベクトル

- (1) 最初に楕円と双曲線及び不等式が表す集合について述べた。

これは従来第 3 巻でやっていたものであるが, 1 年生の内容が多くて授業が遅れがちになるので 2 年生に回した。

- (2) 次に, 曲線の媒介変数表示と極座標を入れた。

媒介変数表示は, 高専の教科書では, 代数の分野で直線の方程式だけを出し, 曲線ของものは後で微積分の所で出している。しかし, 直線だけでは媒介変数の意味と必要性が十分伝わらないので, ここで出した。

極座標も教科書では, 微積分の面積や曲線の長さの所にある。しかし, 平面上の点を表すのに, 直交座標とともに極座標があることをここで教えることにした。

- (3) 空間の図形の基本的な事柄, すなわち点, 直線, 平面の位置関係などを述べた。また, 多面体や角柱, 角錐, 球, 円柱, 円錐などの基礎的な事柄も簡単に述べた。教科書ではまったく記述がないが, 座標を使って図形を表す前にこれらのことを知っておくべきである。

- (4) 空間の座標をベクトルとともに説明した。

ベクトルについては第 3 巻の平面の図形の所で, ごく基礎的な事を述べている。それを復習し, ここで本格的に学ぶようにした。応用として, 力や速度の合成と分解, 力のする仕事などを出した。

- (5) ベクトルの平面図形への応用として, 直線の媒介変数表示や点と直線との距離などを出した。

- (6) 空間の直線や平面の方程式をベクトルを用いて表し, いくつかの応用について述べた。ベクトルによってこそ空間の図形は正確に表すことができる。球面の方程式と接平面について学ばせた。

3.2 第 7 巻 極限と連続

- (1) まず数列の極限と無限級数について述べた。最近の教科書は微積分に早く入るため, 数列の極限

はやらずに始めから関数の極限を出すこともある。
しかし連続的に動く変数よりも、自然数の値を動か
く方が理解し易い。従って数列の極限から始めた。

- (2) 極限の定義を「任意の ε に対して」とすることは、この年代の学生には勿論できない。直観的に「限りなく近づいていく」とする。しかし、可能な限り証明もした。たとえば、

すべての n に対して $|a_n| \leq |b_n|$ で、また

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{ なら, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

を証明なしで認め、三角不等式によって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$$

を示し、更に、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$$

を認めて、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

を示した。こうしておけば、先でもっと厳密な定義に従って考えるとき役立つと思う。

- (3) 有界な単調数列は収束することを認め、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

で自然対数の底 e を定義した。

- (4) 級数は等比級数を中心に述べ、正項級数や絶対収束の理論に深入りしない。無限小数は無限級数であることを理解させ、応用として循環小数を分数になおす練習をさせた。

- (5) 関数の極限も直観的に定義した。数列の極限において成り立った命題の多くが関数の極限においても成り立つことを知らせる。

極限を求める問や練習問題を多く出して、理解を深めるようにした。

- (6) 連続の概念はなかなかつかみにくいので、多くの例を出し、グラフで直観的に理解させるようにした。

よく出て来る関数、すなわち整式や有理式で表される関数、無理関数、指数関数、対数関数、三角関数などの連続性もきちんと述べ、できる範囲で証明した。こうして、

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{1}{2}$$

のような直観的な極限の求め方が許されることを教えた。

- (7) 中間値の定理をグラフによって直観的に理解させ、方程式の解(根)の存在の証明に応用するなど、

連続関数の性質は最小限に留めた。

- (8) 微積分に早く入ろうとして、極限や連続を殆どやらない立場もあるが、ある程度きちんとやってこそ、微分の理解も増し、計算も正しくできるようになる。その意味でこの巻は重要である。

3.3 第 8 巻 微分

- (1) まず、ある時刻における速度という考えを極限を使って述べ、一般化して微分係数を定義した。微分係数がグラフの接線の傾きであることを強調した。

- (2) 導関数を定義し、整式、有理式、正弦、余弦、 e^x など基本的な関数の導関数を出し、簡単なものは自分で導かれるように問を出した。このときも常に、微分係数は接線の傾きであることを指摘し、具体的な像を頭に入れさせることを目指した。

関数の和、差、積、商の微分の練習を十分させるようにした。

- (3) 合成関数の微分法を重視し、豊富な例で練習させる。厳密な証明も添えて、余裕があれば読むようにさせた。

逆関数の微分法によって、対数関数や一般の指数関数の導関数を求めた。

ただし、逆三角関数には触れなかった。余り一度に多くの事をやらせても十分自分のものにできないからである。

- (4) 導関数の記号として y' , y'' などだけでなく、

$$\frac{dy}{dx}, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \text{ などの記号を多く用い、慣れるようにした。}$$

- (5) 微分の応用として、曲線の接線、法線の方程式を出した。

変化率という考えを述べ、速度、加速度などの計算問題も出した。簡単な近似式について述べた。多くの本では微分の応用は、関数の増減等も終わった後で最後に簡単に述べてある。しかし実際にどんな事に使われるのかを早く知らせるのがよいと思い、ここで出した。

- (6) 平均値の定理は証明なしで認め、グラフで直観的に説明した。この定理によって、関数の増減、極値についての命題を導き、具体的に関数のグラフを書く練習をさせる。

応用として、最大、最小問題もできるだけ多く出した。

- (7) 最後に凹凸について述べた。いままで直観的に知っていた放物線やべき関数のグラフの形がここ

の命題によって確かめられる。

- (8) ロピタルの定理とテイラー展開は省いた。

3.4 第 9 巻 積分

- (1) 微分の逆算として不定積分を定義した。基礎的な関数の不定積分をあげた。和、差、定数倍の不定積分の公式を出した。
- (2) 合成関数の微分法によって不定積分を予測して求める練習を多くした。
- (3) 合成関数の微分法によって不定積分を簡単に予測できないものについて、置換積分という方法があることを教えた。また部分積分も出した。
- (4) 有理関数や無理関数の不定積分はごく簡単なものに留めた。逆三角関数を教えていないのでこのようにした。
- (5) 区間を分割して作ったリーマン和の極限で定積分を定義した。
定積分についてのいくつかの命題を述べ、簡単なものは証明した。最後に微分積分法の基本公式を出した。
- (6) 微分積分法の基本公式によって定積分の値を求める計算練習を多くさせるようにした。
- (7) 定積分における置換積分と部分積分の公式を出した。
- (8) 広義積分は省いた。
- (9) 定積分の近似計算として台形公式とシンプソンの公式をあげ、 π の近似値を計算した。
- (10) 定積分の応用として面積、体積、曲線の長さの求め方を述べ、練習させた。また、道のりの計算、そして力学への応用として、力積、仕事、位置エネルギーなどについて述べた。
- (11) 不定積分の応用として、簡単な微分方程式を出した。一般解、特殊解、初期条件、境界条件などを説明した。

$$y' = f(x), \quad y'' = f(x)$$

の形の方程式や変数分離形、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

の形の方程式の解き方を述べ、練習させた。

4. 問題点と課題

命題や公式を導く筋道を詳しく説明し、またそれに沿って十分多くの練習問題を出すという点は、第 1 巻～第 5 巻と同様にかなりできたと思う。そして、単なる微分積分の計算練習に終わるのでなく、できるだけ物理学等への応用を考えた。記号も y' , y'' な

どだけでなく、 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ などを多く使い、数

学以外の分野でよく使われるものに慣れさせるようにした。

また、逆三角関数、ロピタルの定理、テイラー展開、広義積分などを省いて、基本的な関数についての微積分をしっかりと身につけさせようとしたのはよかったと思う。

しかし、詳しく述べようとしてどうしても分量が多くなり、1 年生のとき程ではないが、授業も遅れがちになった。高校なら 3 年間でやる所であるから、もともと無理なことではある。高校なみの速さでよいのなら、この教材でも十分間に合うと思う。

1 年生のときと同様、系統性や論証を重視したため、発見型の述べ方は余りできていない。これは今後の課題である。

5. 資料 教材の目次

資料として、上に述べた 4 冊の教材の目次を書き、大要を知って頂くことにする。

5.1 第 6 巻 図形とベクトル

第 1 章 平面の図形(続き)

§ 1. 楕円と双曲線

1. 楕円の方程式
2. 双曲線の方程式
3. 楕円、双曲線と直線
4. 離心率と準線

練習問題 1

§ 2. 不等式が表す集合

1. 不等式が表す集合
2. 連立不等式が表す集合
3. 最大、最小問題

練習問題 2

§ 3. 曲線の媒介変数表示、極座標

1. 曲線の媒介変数表示
2. 極座標

練習問題 3

第 2 章 空間の幾何学と座標

§ 1. 空間の幾何学

1. 点、直線、平面
2. 半直線のなす角
3. 垂直関係
4. 基礎的な立体

練習問題 4

§ 2. 空間の座標とベクトル

1. 空間の座標

- 2. ベクトル
- 3. ベクトルの成分
- 4. 内分点, 外分点

練習問題 5

§ 3. 距離とベクトルの大きさ

- 1. 二点間の距離
- 2. 単位ベクトル
- 3. 方向余弦

練習問題 6

§ 4. 内積

- 1. 内積
- 2. 射影と成分

練習問題 7

第 3 章 図形の方程式とベクトル

§ 1. 平面の図形とベクトル

- 1. 媒介変数による直線の方程式
- 2. ベクトルの平面図形への応用

練習問題 8

§ 2. 空間の図形の方程式

- 1. 空間の直線の方程式
- 2. 平面の方程式
- 3. 平面の方程式(続き)
- 4. 点と平面との距離
- 5. 球面の方程式

練習問題 9

5.2 第 7 巻 極限と連続

第 1 章 数列の極限と無限級数

§ 1. 数列の極限

- 1. 数列の極限
- 2. 極限の計算
- 3. 等比数列の極限
- 4. 単調数列の極限

練習問題 1

§ 2. 無限級数

- 1. 無限級数
- 2. 無限等比級数
- 3. 級数の一般的な性質

練習問題 2

第 2 章 関数の極限と連続性

§ 1. 関数の極限

- 1. 関数の極限
- 2. 極限の計算

練習問題 3

§ 2. 連続

- 1. 連続
- 2. 連続関数の性質

- 3. 逆関数と合成関数の連続性
- 4. 指数関数と対数関数の連続性
- 5. 三角関数の連続性

練習問題 4

5.3 第 8 巻 微分

第 1 章 微分の計算

§ 1. 微分係数と導関数

- 1. 微分係数
- 2. 導関数
- 3. 関数の四則の微分

練習問題 1

§ 2. 色々な微分法

- 1. 合成関数の微分法
- 2. 逆関数の微分法
- 3. 対数関数等の導関数

練習問題 2

§ 3. 高次導関数

練習問題 3

第 2 章 微分的应用

§ 1. 接線と法線

- 1. 接線, 法線の方程式
- 2. 媒介変数で表された曲線
- 3. 媒介変数で表された曲線の接線
- 4. 陰関数の微分法

練習問題 4

§ 2. 様々な応用

- 1. 変化率
- 2. 近似式と微分

練習問題 5

第 3 章 関数の変動

§ 1. 関数の増減, 極値

- 1. 平均値の定理
- 2. 関数の増減
- 3. 極大, 極小
- 4. グラフの概形
- 5. 因数分解された整式のグラフ

練習問題 6

§ 2. 最大, 最小問題など

- 1. 最大, 最小問題
- 2. 不等式の証明

練習問題 7

§ 3. 凹凸

練習問題 8

5.4 第 9 巻 積分

第 1 章 不定積分の計算

§ 1. 簡単な不定積分の計算

- | | |
|------------------------|----------------------------------|
| 1. 原始関数 | 練習問題 5 |
| 2. 和, 差, 定数倍の原始関数 | 第 3 章 定積分の応用 |
| 3. 合成関数の微分法による原始関数の求め方 | § 1. 面積 |
| 練習問題 1 | 練習問題 6 |
| § 2. 置換積分と部分積分 | § 2. 体積と曲線の長さ |
| 1. 置換積分 | 1. 体積 |
| 2. 部分積分 | 2. 曲線の長さ |
| 練習問題 2 | 練習問題 7 |
| § 3. 有理関数と無理関数の不定積分 | § 3. 定積分の様々な応用 |
| 1. 有理関数の不定積分 | 1. 道のり |
| 2. 無理関数の不定積分 | 2. 力学への応用 |
| 練習問題 3 | 練習問題 8 |
| 第 2 章 定積分 | 第 4 章 簡単な微分方程式 |
| § 1. 定積分の計算 | § 1. 簡単な微分方程式 |
| 1. 定積分の定義 | 1. 微分方程式 |
| 2. 定積分の性質 | 2. $y' = f(x)$, $y'' = f(x)$ の形 |
| 3. 定積分の計算 | 練習問題 9 |
| 4. 置換積分 | § 2. 変数分離形など |
| 5. 部分積分 | 練習問題 10 |
| 練習問題 4 | § 3. 特別な形の 2 階微分方程式 |
| § 2. 定積分の近似計算など | 練習問題 11 |
| 1. 定積分の近似計算 | |
| 2. 極限等への応用 | |

(2002年11月20日 受理)

~~*~*~*~*~*~*~*~*~*~*~*~*~*~*~*~*~*~*