

一般論文

ハイブリッド手法による組合せ最適化問題の解法

前 田 道 治
宮 本 大 聡*

A Solution to Combinatorial Optimization Problem by Hybrid Approaches

Michiharu MAEDA
Hiroaki MIYAMOTO

This paper presents a novel approach by genetic algorithm for solving the traveling salesman problem of combinatorial optimization problem. To begin with, the operation is confirmed for the branch-exchange cross-over method which exchanges the branch of two routes and the 2-opt method which repeats the operation of the reversion for making a part of visit order. Next, it is aimed at the performance improvement by unifying these methods. Furthermore it is attempted the improvement by introducing a twist resolution algorithm. Experimental results are presented in order to show that the present method is effective.

1. まえがき

組合せ最適化問題の一つに巡回セールスマン問題がある。この問題はNP-完全問題であり、厳密解を求めることは困難である [1], [2]。それゆえ、様々な手法を用いて近似解を求める方法が提案されている [3]。その際、遺伝的アルゴリズムや神経回路網など、生体の構成や進化の機構をヒントに提案されたアルゴリズムが用いられる。生体の機構は非常に効率設計されているため、その構成をプログラミングにより再現することによって、巡回セールスマン問題のような膨大な計算量を必要とする問題でも効率よく解を求めることができる [4], [5]。

本研究では、巡回セールスマン問題を解くために、遺伝的アルゴリズムによる解法を試みた。まず、従来手法の、二つの巡回路の枝を交換することによる交叉を用いた枝交換交叉法、そして巡回路の一部の訪問順序を逆順にするという操作を繰り返す2-opt法の2つの手法に対して動作確認を行った。次に、これらを組合すことによって解の性能向上を目指し

た。さらに、新たにねじれ解消アルゴリズムを導入することにより手法の向上を図った。ねじれ解消法の機能を最大限にいかすべく、この手法をどのように適用すればよいかを検討する実験もあわせて行った。

2. 巡回セールスマン問題と遺伝的アルゴリズム

2.1 巡回セールスマン問題

巡回セールスマン問題 (Traveling Salesman Problem : TSP) は次のような問題である。平面上に都市が配置され、その座標の集合が $X = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_M\}$ として与えられる。都市 $\vec{x}_i = (x_i, y_i)$ および都市 $\vec{x}_j = (x_j, y_j)$ の任意の2都市間の距離 $d(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$ を次式で表す。

$$d(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (1)$$

この d が与えられたとき、総距離を次のように記述する。

$$D = d(\vec{x}_1, \vec{x}_M) + \sum_{k=1}^{M-1} d(\vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}) \quad (2)$$

この D が最小となるような巡回路を決定する問題である。言い換えれば、ある都市を出発したセールスマンが各都市を一度ずつ訪問し、再び出発地点に戻るとき、その旅行行程が最小になる経路を求める問題である。図1, 2に10都市の場合の例を示す。黒い点が都市の座標を表す。TSPはNP-完全問題の一つであり、最適解を得るのは困難である。最適解を確実に見つけるにはすべての巡回路を求めれば良いが、その総巡回路数は都市数 n の階乗に及んでしまい現実的な解法とはいえない。それゆえ、様々な手法を用いて近似解を求める試みがなされている。

2.2 遺伝的アルゴリズム

遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm : GA) は1960年代の終わりから1970年の初めに、John H. Hollandらによって提唱された手法である。その内容は、生物の自然界のシステムへの適応過程をヒントに、生物の進化のメカニズムを模擬する人工モデルとして提唱されたものである。現在の生物は古代より進化、淘汰、突然変異を繰り返し環境に適応することで今のような生態になった。このアルゴリズムをプログラムに用いることで、NP-完全問題のような膨大な計算時間を要する問題にも適応でき、近似解を効率よく求めることが出来る。以下にその基本的なアルゴリズムを示す。

[遺伝的アルゴリズムの基本的な流れ]

1. 初期集団の生成をする。
2. 集団に対し、交叉により、新たな個体を生成する。
3. 生成した個体に対し、評価と選択を行う。
4. 一定の確率で突然変異を行う。

5. 2～4を世代数繰り返す。
6. 適応度の高い最良解を出力する。

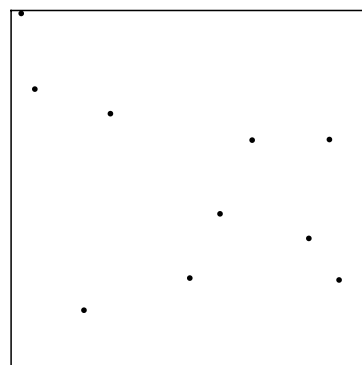


図1. 10都市の例

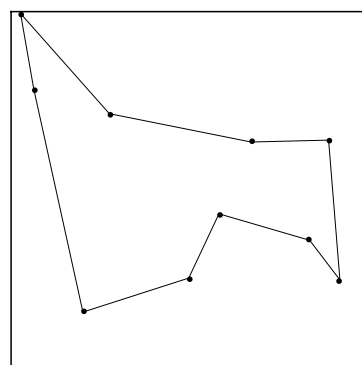


図2. 上図の解の例

3. 遺伝的アルゴリズムによる巡回セールスマン問題の解法

3.1 交叉法について

今回、GAにおいて用いた交叉法は、枝交換交叉法と呼ばれる交叉法である。この交叉法は親の特徴が受け継がれやすい、つまり「形質遺伝」が行われやすいことで知られている。そのため、最適化問題であるTSPには非常に適している。以下にその過程を示す。

[枝交換交叉法アルゴリズム]

1. 二つの巡回路およびのそれぞれについて、これらの含まれる枝を通過順に並べ、

$$E^X = \{e_1^X \cdots e_N^X\} \quad E^Y = \{e_1^Y \cdots e_N^Y\}$$

とする。ただし、枝 $e = (\text{始点 } e_s, \text{終点 } e_t)$ で表し

$$e_k^X = (e_{kS}^X, e_{kT}^X) = (t_k^X, t_{k+1}^X)$$

$$e_k^Y = (e_{kS}^Y, e_{kT}^Y) = (t_k^Y, t_{k+1}^Y)$$

とする ($k=1, \dots, N$)。

2. E^X から一つの枝 e_{i1}^X を選ぶ。さらに、 E^Y から同じ始点 $e_{i2S}^Y = e_{i1S}^X$ を持つ枝 e_{i2}^Y を選ぶ。
3. $e_{j2S}^Y = e_{i2T}^X$ となる枝 e_{j2}^Y , および $e_{j1S}^X = e_{i2T}^Y$ となる枝 e_{j1}^X を選り出す。
4. 枝 e_{i1}^X と枝 e_{i2}^Y とを交換する。 $e_{i1T}^X = e_{i2T}^Y$ であれば終了。
5. 枝 e_{i1}^X と枝 e_{j1}^X の間にある部分巡回路

$$E_{i1j1}^X = \{e_{i1+1}^X e_{i1+2}^X \cdots e_{j1-1}^X\}$$

を逆順にする。

$$\bar{E}_{i1j1}^X = \{e_{j1-1}^X e_{j1-2}^X \cdots e_{i1+1}^X\}$$

ここで、 $\bar{e}_k^X$ は e_k^X の始点と終点を入れ換えた (e_{kT}^X, e_{kS}^X) 枝である。そして E_{i1j1}^X を $\bar{E}_{i1j1}^X$ で置き換える。

6. 枝 e_{i2}^Y と枝 e_{j2}^Y の間の枝 E_{i2j2}^Y について、5. と同様に $\bar{E}_{i2j2}^Y$ を作成し、 E_{i2j2}^Y を $\bar{E}_{i2j2}^Y$ で置き換える。
 7. $i_1 = j_1, i_2 = j_2$ として3. へ。
- 枝交換交叉法アルゴリズムを具体的な例により説明する。

二つの巡回路 T^X および T^Y を考え、 $i_1 = 2$ (すなわち $e_{i1}^X = (D, B)$) と選ぶ。このとき

$$E^X = \left\{ AD \quad \overbrace{DB}^{i1} \quad \overbrace{BE \quad EH \quad HF \quad FG}^{E_{i1j1}^X} \quad \overbrace{GC}^{j1} \quad CA \right\}$$

$$E^Y = \left\{ EF \quad FC \quad CD \quad \overbrace{DG}^{i2} \quad \overbrace{GA \quad AB}^{E_{i2j2}^Y} \quad \overbrace{BH}^{j2} \quad HE \right\}$$

となり、5. および6. の置換えを行うと

$$\rightarrow \left\{ AD \quad \overbrace{DG}^{j1} \quad \overbrace{GF}^{i1} \quad \overbrace{FH}^{j1} \quad \overbrace{HE}^{i1} \quad \overbrace{EB}^{j1} \quad \overbrace{GC}^{i1} \quad CA \right\}$$

$$\rightarrow \left\{ EF \quad FC \quad \overbrace{CD}^{j2} \quad \overbrace{DB}^{i2} \quad \overbrace{BA}^{j2} \quad \overbrace{AG}^{i2} \quad \overbrace{BH}^{j2} \quad HE \right\}$$

が得られる。以後、同様の置換えが繰り返され

$$\rightarrow \left\{ FG \quad GD \quad \overbrace{DA}^{j1} \quad AC \quad \overbrace{HE}^{i1} \quad EB \quad BH \quad HF \right\}$$

$$\rightarrow \left\{ FE \quad \overbrace{EH}^{j2} \quad \overbrace{CD}^{i2} \quad DB \quad BA \quad AG \quad GC \quad CF \right\}$$

→ ……

$$\rightarrow \{AB \quad BE \quad EH \quad HF \quad FG \quad GD \quad DC \quad CA\}$$

$$\rightarrow \{BD \quad DA \quad AG \quad GC \quad CF \quad FE \quad EH \quad HB\}$$

のようにして

$$T^{X'} = (A \ B \ E \ H \ F \ G \ D \ C)$$

$$T^{Y'} = (B \ D \ A \ G \ C \ F \ E \ H)$$

が得られる。

3.2 2-opt法について

2-opt法はTSPに対する逐次改善アルゴリズムの一種である。以下にその過程を示す。

[2-opt法アルゴリズム]

1. 図1のように、巡回路の一部である2つの枝の順序を入れ換える操作を繰り返す。具体的には、枝1の終点と枝2の始点を入れ換えることになる。この場合、巡回路における枝BC, FGをBF, CGに置換えることに相当する。
2. その結果、巡回路の長さが減少すれば新しい巡回路を採用する。
3. 上記の操作を、巡回路長を減少させる置換えがなくなるまで繰り返す。

以上のアルゴリズムの具体例を図3に示す。この図では枝1であるBCと、枝2であるFGを入れ換えている。

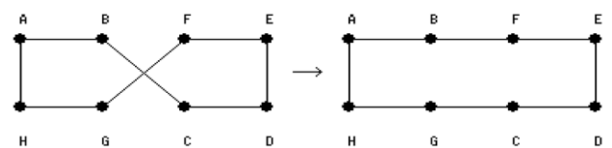


図3. 2-opt法の例

3.3 ねじれ解消法について

これまでのアルゴリズムでは、解にねじれが残り良好な解が得られないことがある。これは巡回路長が長くなることにつながり、ねじれが残った場合にはそれを解消する必要がある。ねじれの判定を行うために、直線の連立方程式をたて、2直線の交点を求め、その交点から判定を行う。以下にその過程を示す。

[ねじれ解消法アルゴリズム]

1. 巡回路を構成する全ての枝の方程式を求める。

点 (a_1, a_2) および点 (b_1, b_2) を通る直線は、以下の方程式より与えられる。

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} \quad (3)$$

これで得た枝の方程式の全ての組み合わせについて連立方程式をたて、 x と y について解くことで2直線の交点が求まる。解がそれぞれの直線の範囲にあれば、つまり解が2直線両方で

$$a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2 \quad (a_1 < b_1, a_2 < b_2 \text{ のとき})$$

を満たせば、2直線が交わっているとみなすことができ、ねじれと判定できる。

2. 1においてねじれと判定された場合、直線1の終点と直線2の始点を入れ換える。

4. 数値実験

4.1 実験1

実験1では、図4～6に示すように10都市、30都市、100都市の3つの都市データに対して解を求めた。用いた手法は「I. 2-opt法」、「II. 枝交換交叉法」、「III. 枝交換交叉法+2-opt法」、「IV. 枝交換交叉法+2-opt法+ねじれ解消法」である。手法I、IIについては前述のとおりである。枝交換交叉法での突然変異確率は5%であり、突然変異が発生した場合は巡回路の中からランダムに選んだ2点間の部分巡回路を逆順にした。手法IIIは枝交換交叉法を適用し、生成した新たな個体に対し、さらに2-opt法を

一定条件のもと適用した手法である。一定条件とは、個体の中からランダムに2つの枝を選びだし、2-opt法を適用する。この操作を繰り返し、都市数の1/10回以上、2-opt法による交叉が行われなければ2-opt法を終了するというものである。手法IVは手法IIIで求めた解に対し、ねじれ解消法を適用したものである。実験結果は各手法1000回の試行により求めたものである。

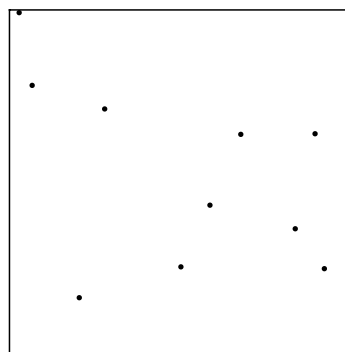


図4. 10都市

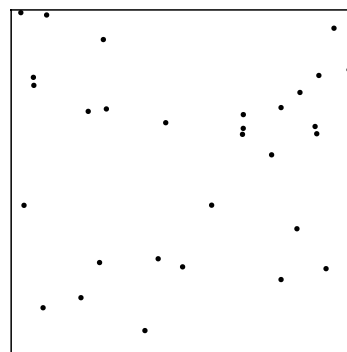


図5. 30都市

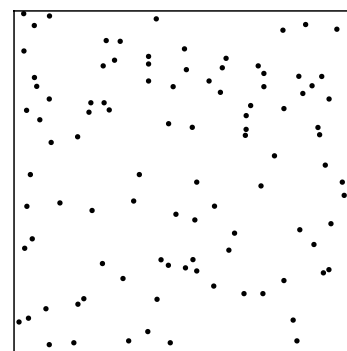


図6. 100都市

まず、10都市、30都市の場合の結果を表1～2、図7～8に示す。表1～2は各手法の実験結果の詳細を、図7～8は手法IIとIIIの解の収束の様子を示す。図7～8では、手法Iは世代数という概念が無いため、手法IVは手法IIIの最終的な解にねじれ解消法をほどこしたものであるため、収束の様子が手法IIIと変わりがないため、手法IIとIIIの結果を表した。

表1．実験結果1（10都市の場合）

手法	I	II	III	IV
世代数	／	10	10	10
個体数	／	10	10	10
最小値	627.47	627.47	627.47	627.47
平均値	636.65	681.19	643.76	634.78
最大値	776.35	808.37	716.27	698.15

表2．実験結果2（30都市の場合）

手法	I	II	III	IV
世代数	／	30	30	30
個体数	／	30	30	30
最小値	910.50	1009.6	927.55	910.50
平均値	1210.7	1292.9	1016.5	969.31
最大値	1698.7	1673.6	1225.9	1188.6

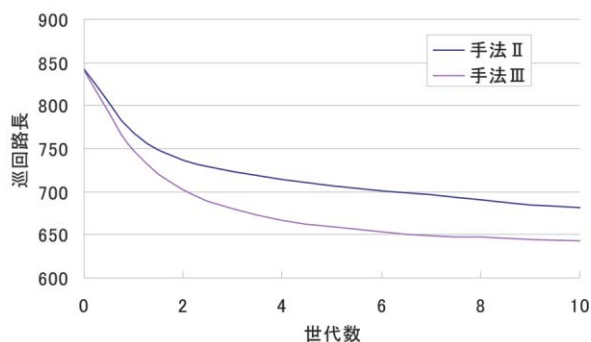


図7．10都市の場合の解の収束の様子

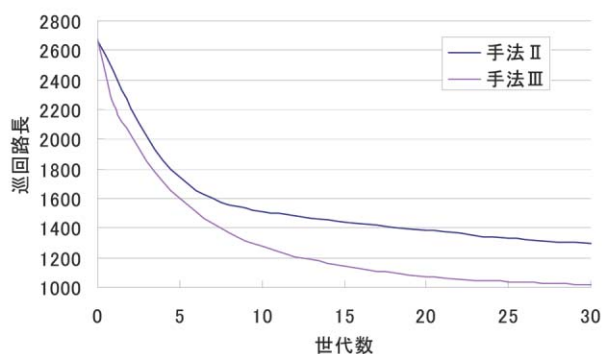


図8．30都市の場合の解の収束の様子

10都市の場合、どの手法でも1000回の試行で最良解にたどり着いている。平均値を見ると手法I，III，IVが優れているが分かる。このことから、2-opt法が有効に機能していることが分かる。この理由は都市数が少ないため、2-opt法による巡回路の逐次改善が成功しているからである。

30都市の場合、手法I，IVで最良解が得られている。しかし、平均値を見ると、手法III，IVは手法Iより優れていることが分かる。このことは都市数が多くなり2-opt法のみでは、解の改善が不十分であるからだと思われる。枝交換交叉法と2-opt法を組み合わせた手法III，IVは依然として有効に機能している。2-opt法により解の収束を早め、枝交換交叉法により優良な個体の形質遺伝が行われているからである。また30都市では、解にねじれが発生することがあり、ねじれの残った手法IIIとねじれを解消した手法IVでは実験結果に差がでた。

次に、都市数を100都市とした場合の結果を表3と図9に示す。ただし、手法Iでは計算に膨大な時間を費やすため、手法II，III，IVでのみ実験を行った。

100都市での実験では、30都市で現れた各手法の精度の差がより顕著なものとなった。手法IIでは優

表3．実験結果3（100都市の場合）

手法	II	III	IV
世代数	100	100	100
個体数	100	100	100
最小値	2691.9	1749.7	1677.9
平均値	3264.0	1922.6	1861.4
最大値	3938.4	2140.3	2028.8

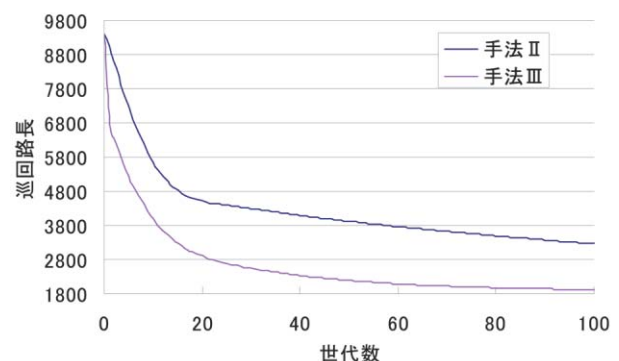


図9．100都市の場合の解の収束の様子

良な解を得ることが出来ず、手法Ⅱと手法Ⅲ、Ⅳとの精度の差は大きなものとなった。また、手法Ⅲより優良な解を得ることが出来たのは手法Ⅳであった。10都市、30都市、100都市の実験結果より、4つの手法の中で手法Ⅳが一番優れていることが分かる。

4. 2 実験2

実験2では、実験1において一番優れていた手法Ⅳについて、更に性能の向上を図るために実験を行った。手法Ⅳは手法Ⅲの最終的な解にねじれ解消法を適用する手法であった。そこで、ねじれ解消法を最終的な解のみに適用するのではなく、初期集団を生成する段階で適応すると解の収束がどのようになるかを調べる。そこで、新たな手法を提案し、前述と同様の実験を行った。なお、用いた都市データは100都市である。新たな手法は「Ⅴ. ねじれ解消法+枝交換交叉法+2-opt法」及び「Ⅵ. ねじれ解消法+枝交換交叉法+2-opt法+ねじれ解消法」である。ここで手法Ⅴは、手法Ⅲの初期集団のうち、都市数の1/10の個体にねじれ解消法を適用した手法である。手法Ⅵは、手法Ⅳの初期集団のうち、都市数の1/10の個体にねじれ解消法を適用した手法である。実験2の結果を表4、図10に示す。比較のため手法Ⅳの結果も同時に示す。

表4. 実験2の結果

手法	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ
世代数	50	50	50
個体数	50	50	50
最小値	1775. 7	1814. 7	1766. 5
平均値	1999. 5	2021. 8	1970. 8
最大値	2214. 6	2258. 5	2214. 1

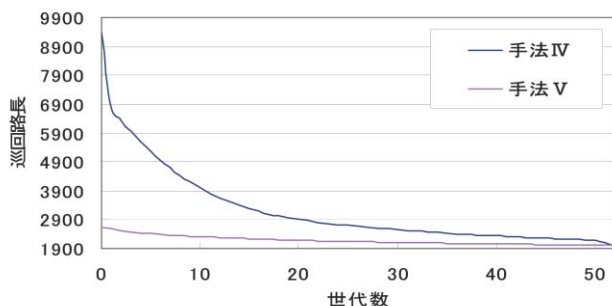


図10. 実験2の各手法の解の収束の様子

実験結果より、若干ではあるが、手法Ⅵが他の手法より優れていることが分かる。これはねじれ解消法により初期集団に優良な個体群が生成され、それらに枝交換交叉法及び2-opt法を適用することにより、他の手法と比較して優良な個体が形成されたものと考えられる。図10に示すように初期集団にねじれ解消法を適用することによって、大幅に解の収束を早めることが出来ている。TSPの性質上、少ない計算量で、よりよい結果を得ることが出来たのは有益なことである。

実験2では、ねじれ解消法をより有効に適用するための実験を行った。その結果、ねじれ解消法を初期集団、そして最終的な解に適用することによって、優良な解をより早く得ることができると確認できた。

5. むすび

本研究では、遺伝的アルゴリズムを用いて巡回セールスマン問題を解くために、新たな手法を記述した。本手法は、ねじれ解消法を導入することにより、性能の向上を目指した。まず、枝交換交叉法、2-opt法、そしてこれらの手法の組み合わせに対して実験を行い、さらにねじれ解消法を適用する方法の実験を行った。実験結果から、複数の手法を組み合わせることによって、手法を単一で適用した場合よりも、手法の性能が向上することが確認できた。また、ねじれ解消を初期集団に適用することにより、解の収束を大幅に早めることも確認できた。これは初期集団の中に、ねじれの無い個体を生成することにより、その優れた個体の形質を受け継いだ新たな個体群が生成されるためであった。

今回の実験により、手法を組み合わせることによって、巡回セールスマン問題の解を効果的に得ることができた。今後の課題として、更なる解の向上や、世代数の短縮などが試みることが挙げられる。

文 献

- [1] 杉原厚吉, データ構造とアルゴリズム, 共立出版, 2001.
- [2] THOMAS H. CORMEN, CHARLES E. LEISERSON, RONALD L. RIVEST著, 浅野哲夫, 岩野和生, 梅尾博司, 山下雅史, 和田幸一共訳, アルゴリ

- ズムイントロダクション, 近代科学社, 1995.
- [3] 北野宏明, 遺伝的アルゴリズム, 産業図書, 1993.
- [4] 前川景示, 玉置久, 喜多一, 西川禕一, “ 遺伝的アルゴリズムによる巡回セールスマン問題の一解法, ” 計測自動制御学会論文集, vol. 31, no. 5, pp598-605, 1995.
- [5] 電気学会編, 遺伝的アルゴリズムとニューラルネット, コロナ社, 1998.
- [6] 久保幹雄, “ 巡回セールスマン問題への招待 II, ” オペレーションズ・リサーチ, vol. 39, no. 2, pp. 91-96, 1994.
- [6] 田中雅博, 坂和正敏, 遺伝的アルゴリズム, 朝倉書店, 1995.