

久留米工業高等専門学校

紀 要

第16卷 第2号

MEMOIRS
OF
KURUME NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY

Vol. 16 No. 2
MARCH 2001

平成 13 年 3 月

久留米工業高等専門学校

久留米工業高等専門学校

紀 要

第16巻 第2号
(平成13年3月)

目 次

だ円板を囲む大きな板の周辺に面内荷重が作用する場合の複素応力関数	今橋良真一治	1
ホブの精度及びその取付け精度と歯車歯形誤差との関係	廣尾田靖彰功	7
福桜木		
インターネットを用いた産業用ロボットアームの遠隔制御実験	江頭成人	13
1-(4-Methylphenyl)ethyl pentafluorobenzoateのソルボリシス中に生成するイオン対からの原系復帰の速度	辻江頭栗正彦	19
西原田隆之		
ある種の非線形境界値問題に対する Hermite 近似の応用による射的数値解法	杠顕一郎	25
加賀一向一揆における「郡」の役割	松尾一	33
剣道における打突動作(2) —「対角線活動」と「ナンバ」—	木寺英史	41
表計算ソフト「エクセル」を用いた電子軌道シミュレーション(その2) —空間電荷効果を考慮した場合—	杉森欣三	47
第7回アルミニウム合金国際会議(ICAA-7)に出席して	中山勝	53

一般論文

だ円板を囲む大きな板の周辺に面内荷重が作用する場合の複素応力関数

今井良一
橋村真治

Complex Stress Functions of an Infinite Plate which surrounds an Elliptical Plate and is subjected to In-Plane Loads at infinity

Ryoichi IMAI
Shinji HASHIMURA

Materials of an elliptical plate and an infinite plate differ. Two plates bond together. The complex stress functions are investigated for several models.

1. 緒 言

著者らは先に、だ円板を囲む大きな板に面内荷重が作用する状態を弾性解析し荷重型境界条件のみを満たす複素応力関数を示した¹⁾。本研究では、だ円板と大きな板が両者の境界で固着²⁾した状態を取り上げた。このような状態では荷重型境界条件並びに変位型境界条件を満たさなければならない。

柴田ら³⁾は本研究内容と同じようなものを取り上げている。しかし、いくつかの点で柴田らの研究内容と本研究内容とは異なる。複素応力関数について異なる点は、複素応力関数の導入方法、表示式、応用などである。

以上の事情を考慮し、いくつかのモデルに対し理論解析を行った。そして、複素応力関数を示した。

2. モデルに対する弾性解析

設定したモデルに対し弾性解析を行い、複素応力関数の計算法について説明する。

2.1 モデルの設定

だ円板とこれを囲む大きな板に対し、図1に示す弾性板モデルを設定した。モデルの力学的な特徴は、だ円板と大きな板とで材料は異なる、だ円板の中心点(0, 0)での変位は零である、2枚の板は境界で固着している、大きな板の外周付近では一様な応力分布である、外周上でのみ等分布荷重が作用する、応力状態は平面応力状態であることなどにした。

2.2 基礎理論

一般に、与えられた荷重状態の弾性板には一組の

複素応力関数 $\phi(z)$ と $\psi(z)$ が対応し、これらから応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ 、変位成分 u, v 並びに合力 P_x, P_y は次式のように与えられる⁴⁾。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2R_e[\phi'(z)] - R_e[z\phi''(z) + \psi''(z)], \\ \sigma_y &= 2R_e[\phi'(z)] + R_e[z\phi''(z) + \psi''(z)], \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = I_m [z\phi''(z) + \psi''(z)]. \end{aligned} \quad (1)$$

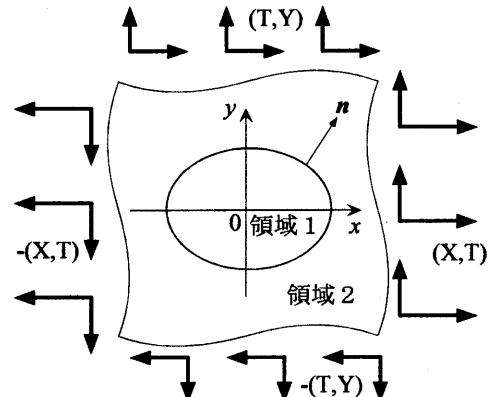


図1 モデルの詳細図と z 平面
領域1：長軸 $2a$, 短軸 $2b$ のだ円板
領域2：領域1を囲む非常に大きな正方形板

だ円板の中心： xy 座標の原点0
だ円周上の法単位ベクトル

$$n = (bcos\beta, asin\beta)/\sqrt{a^2sin^2\beta + b^2cos^2\beta}$$

角度 β は式(13)参照

大きな板の外周上で作用する等分布荷重は表面力 (X, T) や (T, Y) などである。だ円板の横弾性係数は G_1 、ポアソン比は ν_1 で大きな板のものは G_2, ν_2 である。

$$u - iv = \frac{1}{2G} [\kappa \bar{\phi}(z) - \bar{z}\phi'(z) - \psi'(z)]. \quad (2)$$

$$-P_y - iP_x = \bar{\phi}(z) + \bar{z}\phi'(z) + \psi'(z). \quad (3)$$

図2のような経路QPについて、表面力(p_x, p_y)と右側が左側に及ぼす合力(P_x, P_y)の関係は、

$$P_x = \int_Q^P p_x ds, \quad P_y = \int_Q^P p_y ds$$

であり、

表面力は、合力の密度⁵⁾と見なしうる。 (4)

また、表面力(p_x, p_y)は、注目する表面上の点での応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ 並びに外向き法単位ベクトル n (l, m)を用いて、

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \quad (5)$$

とも表わしうる¹⁶⁾(図2参照)。

2.3 モデルに対する境界条件

境界条件は、下記の条件1~4とした。条件1と2は荷重型境界条件であり、条件3と4は変位型境界条件である。

条件1 モデルの外周上に等分布荷重が作用する。したがって、そこでの各応力成分の値は、

$$\sigma_{x2}^\infty = X, \quad \sigma_{y2}^\infty = Y, \quad \tau_{xy2}^\infty = \tau_{yx2}^\infty = T. \quad (6)$$

条件2 だ円板と大きな板は固着しているので、だ円板が受ける表面力(p_{x1}, p_{y1})と大きな板が受ける表面力(p_{x2}, p_{y2})の関係は、モデルのだ円周L上で

$$(p_{x2}, p_{y2}) = -(p_{x1}, p_{y1}) \quad (7)$$

である。

条件3 だ円板の変位は、原点では零である。

$$u_1 - iv_1|_{z=0} = 0 \quad (8)$$

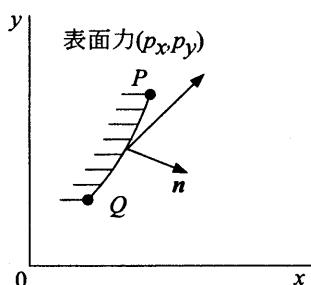


図2 経路QP上に作用する表面力(p_x, p_y)と法単位ベクトルn

条件4 だ円板と大きな板は固着しているので、だ円板の変位(u_1, v_1)と大きな板の変位(u_2, v_2)の関係は、L上では

$$u_1 - iv_1 = u_2 - iv_2 \quad (9)$$

である。

2.4 境界条件を満足させるための考え方

考え方として、考え方1~3を取り上げた。

考え方1: 各複素応力関数の特徴を利用すること
だ円板に関数fのみを導入する。関数fはTaylor級数⁴⁾で、条件2~4を満たす。一方、大きな板に対し関数gとhを導入する。前者gは、一様な応力場を与える。後者hは、関数gと共にだ円周上での条件2と4を満たすが、モデルの外周上では応力は生じないものである。このようなhを用いれば、g+hは条件1も満たす。そこで、

$$\begin{aligned} \text{だ円板の複素応力関数は } f, \\ \text{大きな板の複素応力関数は } g+h, \end{aligned} \quad (10)$$

とする。

考え方2: 合力を取り扱うこと

条件2を満足させるには表面力を取り扱わねばならないが、合力を取り扱う方が容易であるので、合力を取り扱う。その後で条件2が満たされていることを検証する。

考え方3: モデル内の点と別の平面上の点とを対応させること

モデル内のだ円外周を別の平面上の円周に対応させることができれば、だ円周上で境界条件を満足させることを円周での取り扱いに代えることができる。また、円周での取り扱い方¹⁾が参考になる。以上のように考えると直接だ円周上を取り扱うより円周での取り扱いを実行する方が有利である。したがって、モデル内の点と別の平面上の点との対応、すなわち写像を行った。写像の要領¹⁾を以下に説明する。

モデルが存在する平面をz平面、別の平面を ζ 平面とする。両平面間の写像は、式(11)~式(13)に示す。

写像関数

$$\begin{aligned} z = Z(\zeta) = c(\zeta + 1/\zeta), \\ c = \sqrt{a^2 - b^2}/2, \end{aligned} \quad (11)$$

により、

$$\text{だ円外周 } x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \quad (12)$$

とその外側は、 ζ 平面上の円周

$$\operatorname{Re}^{i\beta}, R = \sqrt{(a+b)/(a-b)} \quad (13)$$

とその外側に対応する。

以上のような考え方に基づいて2.5節において複素応力関数の決定方を説明する。

2.5 モデルに対する複素応力関数の決定方

だ円板に対する複素応力関数の一般形は、以下のようなものとしてよい⁴⁾。

$$\begin{aligned}\phi_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \\ \psi_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n.\end{aligned}\quad (14)$$

大きな板に対する複素応力関数の一般形は、以下のようなものとしてよい⁴⁾。

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \Phi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \zeta^n, \\ \psi(z) &= \Psi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \zeta^n + K \log \zeta.\end{aligned}\quad (15)$$

式(14), (15)の係数 A_n, B_n, C_n, D_n, K などは、境界条件を満足するように決める。

式(15)の z に関する導関数を得る要領は、文献1)と4)を参考にすればよい。

条件2-4を満たす関数 f に相当するものは、

$$\begin{aligned}\phi_1(z) &= A_1 z, \\ \psi_1(z) &= B_2 z^2,\end{aligned}\quad (16)$$

である。

一様な応力場を与えるもの⁴⁾は、

$$\begin{aligned}\phi_{21}(z) &= Az, \\ \psi_{21}(z) &= Bz^2,\end{aligned}\quad (17)$$

であり、2.4節の関数 g に相当する。

式(17)の関数と共に条件2と4を満たすものは、

$$\begin{aligned}\phi_{22}(z) &= C_{-1}/\zeta, \\ \psi_{22}(z) &= D_{-2}/\zeta^2 + K \log \zeta,\end{aligned}\quad (18)$$

であり、2.4節の関数 h に相当する。

式(16)-(18)における係数は、次式⁴⁾と表1に示す。

$$\begin{aligned}A &= (X+Y)/4, \\ \operatorname{Re}[B] &= B_R = (Y-X)/4, \\ \operatorname{Im}[B] &= B_I = T/2.\end{aligned}\quad (19)$$

式(16)と(18)の形は、式(14)と(15)に対し式(20)-(24)のような操作をして得た。

モデルの外周上 ($\zeta = \infty$) で式(15)による応力は生じないので、係数 C_n, D_n の中で、

$$C_n = 0, D_n = 0, (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (20)$$

式(14)と(17)による合力並びに変位は z で表示されるが、だ円周上での境界条件を取り扱う時は、だ円周上の z には、特に

$$\begin{aligned}z_e &= c(\zeta_e + 1/\zeta_e), \\ \zeta_e &= \operatorname{Re}^{i\beta}\end{aligned}\quad (21)$$

を代入する。

表1 係数表 [表中, $\Gamma = G_1/G_2, \kappa_1 = (3-\nu_1)/(1+\nu_1), \kappa_2 = (3-\nu_2)/(1+\nu_2), t_1 = \Gamma(\kappa_2+1), t_2 = \Gamma\kappa_2+1, t_3 = 1-\Gamma, t_4 = 2\Gamma-1+\kappa_1, t_5 = \kappa_1+1, t_6 = \kappa_2+1, W_1 = t_1 t_5 + t_2 t_4 (R^4-1), W_2 = R^4 t_2 - t_3.]$

係数	実 部	虚 部
A_1	$\frac{t_1(R^4 t_2 + t_3) A}{W_1} + \frac{2t_1 t_3 R^2 B_R}{W_1}$	$\frac{-t_1}{t_5} \frac{2R^2 t_3 B_1}{W_2}$
B_2	$\frac{t_1 R^2 (t_4 + t_5 - 2t_2) A}{W_1} + \frac{t_1 t_4 R^4 B_R}{W_1}$	$\frac{t_1 R^4 B_1}{W_2}$
C_{-1}	$\{1 - t_4(R^4 t_2 + t_3)/W_1\} c(R^4 - 1) A - 2t_3 t_6 c(R^4 - 1) R^2 B_R / W_1$	$\frac{2t_3(R^4 - 1) R^2 c B_1}{W_2}$
D_{-2}	$[t_6 R^2 \{1 - \kappa_1\} (R^4 t_2 + t_3) - 2t_2 + t_4 + t_5] / W_1 + R^2(R^4 - 1) t_4 (R^4 t_2 + t_3) / W_1 + R^2(\kappa_2 - R^4)] c^2 A / 2 + [R^4 t_6 \{t_3(1 - \kappa_1) + t_4\} / W_1 + R^4(R^4 - 1) t_3 t_4 / W_1 - 1] c^2 B_R$	$\frac{(1+R^4)(1-R^4)t_3 c^2 B_1}{W_2}$
K	$2c^2(R^2 - R^{-2})(R^4 t_2 + t_3)(t_1 - t_4) A / W_1 + 4c^2(R^2 - R^{-2})t_3 R^2(t_1 - t_4) B_R / W_1$	0

だ円周上では、式(14)による合力は式(15)と(17)による合力の和に等しいとするので、

$$P_{y1} + iP_{x1}|_{z=z_e} = P_{y2} + iP_{x2}|_{z=z_e} \quad (22)$$

また、だ円周上では式(14)による変位成分は式(15)と(17)による変位成分の和に等しいとするので、

$$u_1 - iv_1|_{z=z_e} = u_2 - iv_2|_{z=z_e} \quad (23)$$

式(22)と(23)は式(21)を利用すれば、

多くの $e^{i\beta}$ のべき乗×係数の和=0となる。これらの式で $e^{i\beta}$ のべき乗の係数について、

その係数をすべて零とする。 (24)

以上のように本報では、条件2を満足させるにあたり直接表面力を取り扱わないで合力を取り扱った。その妥当性を次の1)と2)で確認した。

1) 固着状態にあるだ円板外周と同一領域内の仮想断面⁷⁾とで成り立つことは同じである(図3)。

2) 複素応力関数からだ円板と大きな板それぞれの応力成分を求めた。それらの応力成分を用い、だ円周上の表面力の数値計算をした。だ円板の表面力は大きな板の表面力のマイナスであった(表2)。

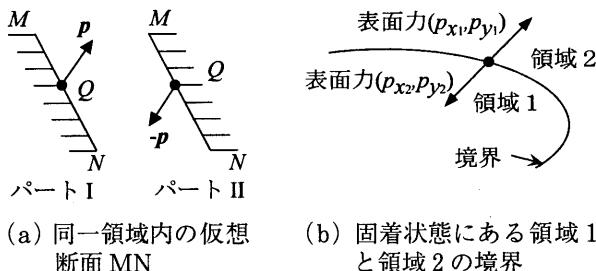


図3 境界上の表面力と合力

同一領域内仮想断面MN上のQ点での表面力は、パートI側で p であり、パートII側では $-p$ である。同様にして、固着状態にある境界上任意の点で合力 $(P_{x1}, P_{y1}) =$ 合力 (P_{x2}, P_{y2}) の時には、右側が左側に及ぼす表面力 $p = (p_{x1}, p_{y1})$ 、左側が右側に及ぼす表面力 $-p = (p_{x2}, p_{y2})$ である。(図2と式(4)参照)。

表3 応用例1と2における係数(表1の係数に対し、応用例1では $\Gamma=1$ 、 $\nu_1=\nu_2$ 、応用例2では $\Gamma=0$ とした。)

応用例	A_1	B_2	C_{-1}	D_{-2}	K
1	A	B	0	0	0
2	0	0	$-2c(A+BR^2)$	$c^2(BR^4-B)$	$-2c^2(R^{-2}+R^2)A$ $-2c^2(B+B)$

3. 複素応力関数の応用

2.5節に示した複素応力関数には、だ円板の寸法を表す a と b 、2枚の板の弾性係数 G_1 、 G_2 、 ν_1 、 ν_2 、荷重を表す X 、 Y 、 T 、などのパラメータが含まれている。したがって、これらのパラメータを調整すると特定のモデルにおける複素応力関数や特徴が得られる。このような操作をした応用例を説明する。

応用例1) 一様な応力場になる一枚の平板モデル

図1のだ円板と大きな板とが同一材料である場合に相当する。このような場合の係数 A_1 、 B_2 、 C_{-1} 、 D_{-2} 、 K を表3に示す。両者の複素応力関数は、等しく式(17)のものとなる。

応用例2) 自由なだ円孔を含む大きな板

自由なだ円孔とは、だ円周上任意の点での表面力が零ということである。任意の点でということは式(5)での l と m の値が何であってもということである。したがって、だ円板において表面力 $(p_{x1}, p_{y1}) = (0, 0)$ となるには $\sigma_{x1} = 0$ 、 $\sigma_{y1} = 0$ 、 $\tau_{yx1} = \tau_{xy1} = 0$ でなければならない。そうなるには、表1において $\Gamma = 0$ すなわちだ円板の横弾性係数 $G_1 = 0$ であればよい。 $\Gamma = 0$ として得られるものがこの例の係数であり表3に示す。係数も複素応力関数も、文献1)のものに一致する。

表2 だ円外周の一部における表面力の値
(長軸 $2a$ ・短軸 a のだ円、 $\Gamma=0.5$ 、 $X=0$ 、 $Y \neq 0$ 、 $T=0$)

β 度	だ円板		大きな板	
	p_{x1}/Y	p_{y1}/Y	p_{x2}/Y	p_{y2}/Y
0	0.0307	0.0000	-0.0307	0.0000
10	0.0289	0.2794	-0.0289	-0.2794
20	0.0248	0.4943	-0.0248	-0.4943
30	0.0201	0.6350	-0.0201	-0.6350
40	0.0157	0.7216	-0.0157	-0.7216
50	0.0119	0.7746	-0.0119	-0.7746
60	0.0085	0.8070	-0.0085	-0.8070
70	0.0055	0.8264	-0.0055	-0.8264
80	0.0027	0.8367	-0.0027	-0.8367
90	0.0000	0.8400	0.0000	-0.8400

応用例3) 内部き裂を含む大きな板

内部き裂を含むモデルを導入するには、応用例2において $b \rightarrow 0$ の極限移行を行えばよい。そこで式(11), (13), 応用例2の諸量に極限移行を行えば、

$$\begin{aligned} c &= a/2, R = 1, \zeta = (z + \sqrt{z^2 - a^2})/a, \\ C_{-1} &= -a(A+B), \\ D_{-2} &= a^2(B-B)/4, \\ K &= -a^2(A+B_R), \\ \phi_2(z) &= Az + C_{-1}/\zeta, \\ \psi_2(z) &= Bz^2 + D_{-2}/\zeta^2 + K \log \zeta. \end{aligned} \quad (25)$$

引張問題 図4(a)では、 $X=Y$, $T=0$, $A=Y/2$, $B=0$ であるので、式(25)の

$$\begin{aligned} C_{-1} &= -aY/2, D_{-2}=0, \\ K &= -a^2Y/2. \end{aligned} \quad (26)$$

面内せん断問題 図4(b)では、 $X=Y=0$, $T \neq 0$, $A=0$, $B=iT/2$ であるので、式(25)の

$$\begin{aligned} C_{-1} &= aiT/2, D_{-2} = -a^2iT/4, \\ K &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

また、式(26)や(27)を式(25)の複素応力関

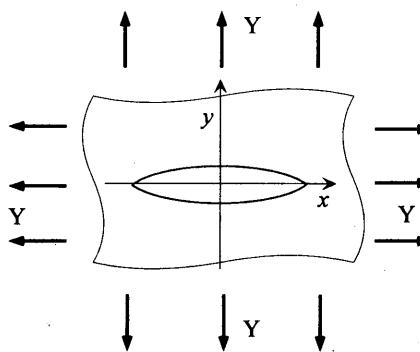
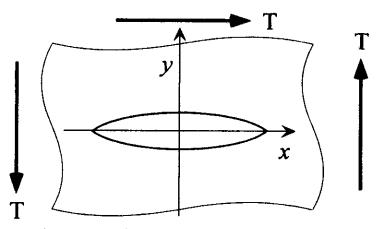
(a) 一様引張り状態⁸⁾(b) 面内せん断状態⁸⁾

図4 内部き裂を含む大きな板

数に代入して得る応力成分は文献8)に紹介された複素応力関数から得られるものと一致する。

応用例4) 荷重の作用方向とだ円の長軸との交角が変化するモデル

文献8), 9)には図5のようなモデルが紹介されている。このようなモデルに対する複素応力関数を本報のものから得るには二つの座標系間での応力成分の変換を利用すれば良い。Ox'y'z' と Oxyz 両座標間での応力成分の変換⁶⁾は、

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\sigma_{x'} + \sigma_{y'})/2 + (\sigma_{x'} - \sigma_{y'})/2\cos 2\alpha \\ &\quad + 2\tau_{xy'} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \sigma_y &= \sigma_{x'} + \sigma_{y'}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy'} \cos 2\alpha - (\sigma_{x'} - \sigma_{y'})/2\sin 2\alpha \end{aligned}$$

したがって、図5(a)のモデルの外周で、

$$\begin{aligned} \sigma_{x2}^{\infty} &= X = S \sin^2 \alpha, \quad \sigma_{y2}^{\infty} = Y = S \cos^2 \alpha, \\ \tau_{xy2}^{\infty} &= T = S \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (28)$$

図5(b)のモデルの外周で、

$$\begin{aligned} \sigma_{x2}^{\infty} &= X = S \cos^2 \alpha, \quad \sigma_{y2}^{\infty} = Y = S \sin^2 \alpha, \\ \tau_{xy2}^{\infty} &= T = -S \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (29)$$

となる。

式(25)と応用例2)でのX, Y, Tにそれぞ

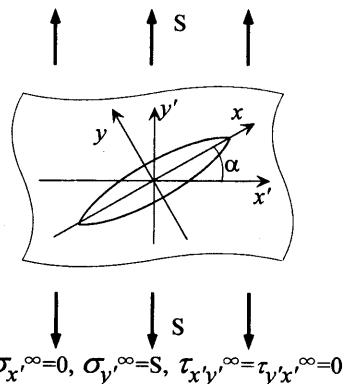
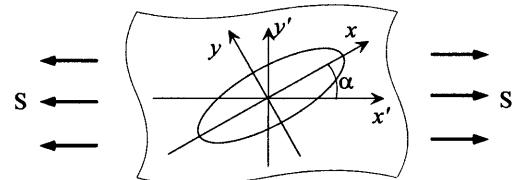
(a) き裂の場合⁸⁾(b) 自由なだ円孔の場合⁹⁾図5 任意方向に引張られる大きな板
(引張られる方向は角αの値で指定できる。)

表4 剛性比 Γ が1.0から0.0へ変化する過程¹⁰⁾でのだ円板内の応力 σ_{x1} , σ_{y1} , τ_{xy1} の値(剛性比 $\Gamma=G_1/G_2$ 。だ円板で $a=2b$ とした。)荷重は、 $X=0$, $Y\neq 0$, $T=0$ 。材料が違ってもポアソン比は、ほぼ0.3であるので、 $\nu_1=\nu_2=0.3$ とした。 $\tau_{xy1}/Y \equiv 0$ 。)

Γ	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0
σ_{x1}/Y	0.0	0.006	0.012	0.018	0.024	0.031	0.036	0.040	0.041	0.032	0.0
σ_{y1}/Y	1.0	0.979	0.955	0.925	0.888	0.840	0.777	0.691	0.566	0.366	0.0

式(28), (29)の置き換えをおこなって得る複素応力関数は、図5のモデルに適する。

応用例5) 疲労き裂の発生過程におけるき裂の起点とこれを囲む領域モデル

疲労き裂の発生過程ではき裂の起点とこれを取り囲む領域との境界面が次第に自由(表面力 p_x も p_y も零)になると解釈できる¹⁾。疲労き裂の起点とその近傍は図1のモデルに、そして疲労き裂の発生過程はだ円周上を通じてだ円板が大きな板に対し及ぼす表面力が次第に小さくなり最終的には零になる過程に対応させうる。このような対応の一例として、表4は引張状態で σ_{x1} , σ_{y1} , τ_{xy1} が減少していく様子を示す。だ円板内の応力成分の値がこのように減少していくれば、だ円周上の表面力(p_{x1} , p_{y1}) (式(5)参照)も減少し、 $\Gamma=0$ (自由なだ円周)の状態では最終的に(0.0, 0.0)になる。

4. 結論

面内荷重を受ける数個のモデルに対し、正確な複素応力関数をそれぞれ示した。したがって、それら

の応力や変位は式(1), (2)より計算できる。

最後に、複素関数の取り扱いについてアドバイスをして下さった本校杠教授に謝意を表します。本研究の数値計算処理は、本校電子計算機室においてFD-FORTRANによって行われたことを記す。

参考文献

- 1) 今井 ほか2名: 久留米高専紀要, 15-2 (2000), 1。
- 2) 梅棹 ほか3名: 日本語大辞典, (1989), 708, 講談社。
- 3) 村田・向井: 機論, 58-555, A (1992), 2069。
- 4) 柴田 ほか3名: 機論, 60-578, A (1994), 2303。
- 5) 森口: 2次元弾性論, (1957), 6, 12, 15, 33, 62, 64, 76, 岩波書店。
- 6) 森口 ほか2名: 数学公式I, (1956), 62, 岩波書店。
- 7) 三村: 大学演習微分積分学, (1959), 158, 裳華房。
- 8) 今井 ほか3名: 久留米高専紀要, 7-2 (1992), 67。
- 9) 奥村: 材料力学, (1979), 19, コロナ社。
- 10) 中原: 材料力学上巻, (1979), 71, 養賢堂。
- 11) 石田: き裂の弾性解析と応力拡大係数, (1976), 20, 22, 140, 倍風館。
- 12) 竹内: 大学演習弾性論, (1970), 56, 裳華房。
- 13) 今井・奥園: 久留米高専紀要, 6-2 (1991), 1。

一般論文

ホブの精度及びその取付け精度と歯車歯形誤差との関係

廣尾靖一
福田幸一
桜木功

Gear Tooth Profile Error caused by Hob Tooth Error or Hob Misalignment

Yasuaki HIROO
Koichi FUKUDA
Isao SAKURAGI

The good hobbing machine, high quality hob and gear blank are needed to cut high quality gear. Moreover, it requires a great deal of technical skill to bring their ability into full action. Analysis of hobbing mechanism is necessary to know relation between gear tooth profile accuracy and accuracy of hob or misalignment of it. There are usually some difficulties to study the mechanism because three-dimensional analysis is required to understand the gear tooth generation. In this report, we show a relatively simple way to estimate the tooth profile error of hobbed gear in a short time changing from three-dimensional problem to two-dimensional one and generating helical rack with the hob.

1. 緒 言

ホブによるインボリュート歯形の創成はホブの切れ刃が表わすラックと理想的にかみ合う運動を歯車に与えて行う。歯形精度に影響を及ぼす要因は、ホブの精度、ホブ盤の精度や剛性、ホブや歯車材の取り付け状態、温度などの環境等多くある。我々は先に平歯車をホブ切りする場合、ホブのピッチ誤差、圧力角誤差、また、ホブの取り付け精度と切削される歯車の歯形との関係について解析した結果について報告した¹⁾。その方法は歯数が無限大の歯車、つまりラックをホブ切りするとして簡易に歯形を予測するもので、今回はその手法をインボリュートはすば歯車のホブ切りに応用する解析方法と歯切実験結果について報告する。

2. はすば歯車のホブ切り機構

はすば歯車も平歯車を歯切りするホブで創成される。はすば歯車のホブ切りではホブの切れ刃は正しい歯形をもった、ねじれ角 β のはすばラックが正確に歯車材の接線方向に移動するよう配置する必要がある。理想的なホブはその口数に等しい歯数のはすば歯車を表し、ホブ切りは任意のねじれ角のはすば歯車とホブ盤上でねじ歯車のかみ合い状態にある。

ホブ軸と歯車軸はねじれた状態にあり、直接的に三次元の空間を把握することが困難な場合もあるので、余分な作業が必要であるが、解り易いように投影を行ない二次元の問題として解析した。その原理は理想的なはすばラックとホブの切れ刃の間隔を求めて創成される歯形を予測するものである。計算は歯形の創成に関する各切れ刃と作用線との交点に限定して行った。

2.1 ホブ切り時のホブの動き

図1は右ねじれの歯車をホブ切りするとき、ホブ切れ刃の1点の動きを投影した状態である。(A)部はその平面図で、(B)部が立面図でホブ盤のワークテーブル側からの投影で第三角法で描いている。(C)はホブ軸方向からの副平面図で、さらに(D)の副立面図へと展開して示している。(D)は切れ刃を二番面側から見た状態であるが、ホブの実形を表現でき、解析のためのホブの寸法が得られる。ここで、ホブの各切れ刃に図2のように番号をつける。切れ刃の中心がホブ軸と歯車材軸との共通垂線（これを創成中心線と呼ぶことにする）と一致する切れ刃を0番とし、図のように整数の番号をつける。この例はホブの切れ刃溝数が10の場合である。(D)において、k番切れ刃と作用線との交点の動きは常時ホブ軸を中心に円運動しており、(C)でそれが表現される。(D)ではその投影図であるのでホブ

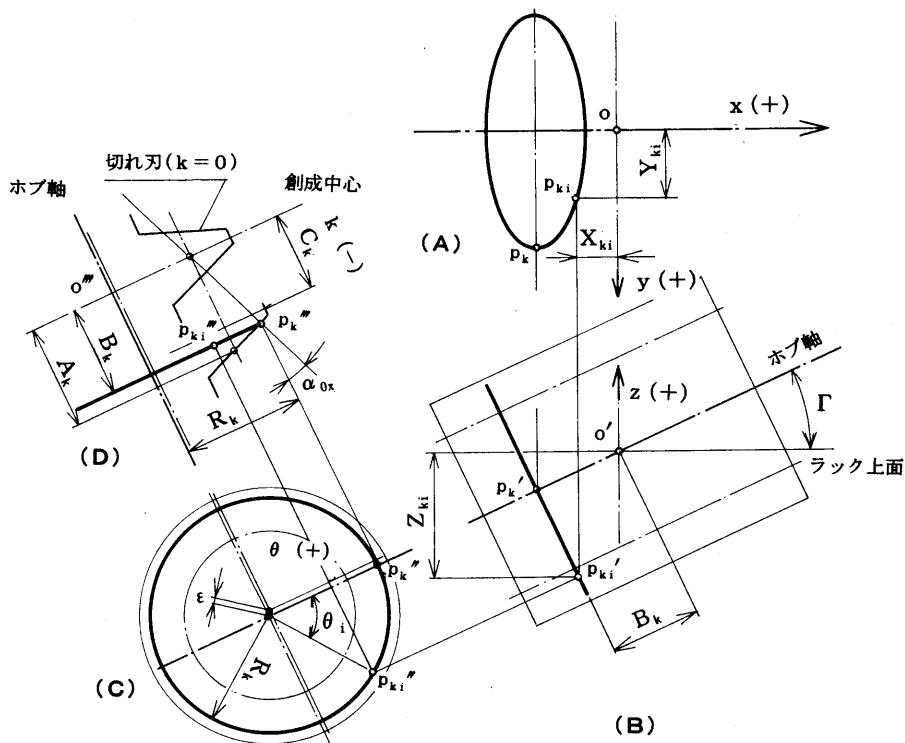


図1 ホブ切りにおけるホブ切れ刃の動き

表1 使用する記号と添え字

記号	添え字		
モジュール	m	歯先	a
ピッチ	p	歯元	f
圧力角	α	軸直角	t
歯数	z	歯直角	n
歯厚	s	軸方向	x
ねじれ角	β	ホブ	0
進み角	γ	歯車	1
ピッチ径	d	ラック	2
切れ刃溝数	G		
ホブの口数	N		
切れ刃番号	k		

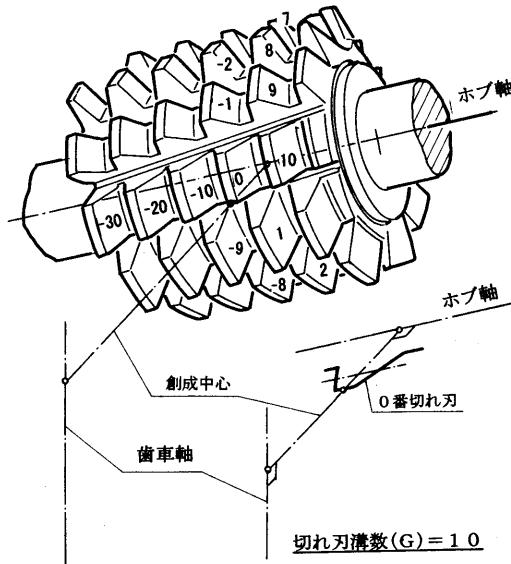


図2 ホブの切れ刃番号

軸に直角な直線となる。その動きは (B) の立面図では (D) と同じくホブ軸に直角な直線として投影され、(A) では円がホブ軸の傾き角 Γ 分回転した橒円となる。ホブ盤で創成運動を与えても切れ刃は常に一定の場所で円運動を行っている。 P_k 点が水平状態から θ_i 回転したときの位置 P_{ki} 点の投影図は p_{ki} (平面図), p_{ki}' (立面図), p_{ki}'' (副平面図), p_{ki}''' (副立面図) となる。

一方ホブが表わすラックは (A) の平面図で正面歯形の実形が現れるので P_{ki} 点の平面図での位置を求めるにラックと切れ刃の間隔がわかる。位置を示す座標はホブ軸の平面図を X 軸、創成中心を Y 軸、それぞれに垂直に Z 軸とし、それぞれ正方向を図のように定め、 P_{ki} 点の座標 (X_{ki} , Y_{ki} , Z_{ki}) は次式で表わされる。

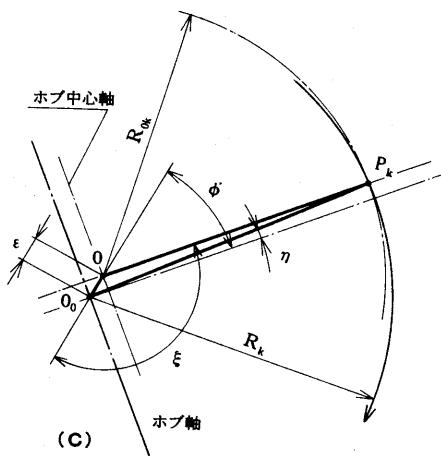


図3 ホブのオフセット

$$X_{ki} = B_k \cdot \cos \Gamma - R_k \cdot \sin \theta_i \cdot \sin \Gamma \quad (1)$$

$$Y_{ki} = R_k \cdot \cos \theta_i \quad (2)$$

$$Z_{ki} = B_k \cdot \sin \Gamma + R_k \cdot \sin \theta_i \cdot \cos \Gamma \quad (3)$$

$$C_k = L_{0x} \cdot \frac{k}{G} \quad (4)$$

$$A_k = C_k + \frac{S_{0x}}{2} + \Delta p \quad (5)$$

$$B_k = A_k \cdot \cos^2 \alpha_{0x} \quad (6)$$

ここで C_k は創成中心から k 番切れ刃の中心までの距離で、 L_{0x} はホブの軸方向のリード、 G はホブの切れ刃溝数である。 A_k は創成中心から k 番切れ刃のピッチ点までの距離で、 S_{0x} は切れ刃の軸方向歯厚で、ピッチ誤差 Δp を考慮する。 α_{0x} は切れ刃の軸方向圧力角で誤差がある場合は修正して P_k 点までの距離を求める。

図3は図1の(C)部の状態を示したものである。角度 ϕ はホブ中心のオフセットによる最大振れを示す位置で、0番切れ刃を含む切れ刃溝からの角度を表わす。図3の η は微小である。ホブの中心から P_k 点までの距離(回転半径)は次式の R_{0k} である。

$$R_{0k} = A_k \cdot \cos \alpha_{0x} \cdot \sin \alpha_{0x} + \frac{d_0}{2} \quad (7)$$

しかし、ホブ中心がホブ軸中心からずれていると次式のように回転の中心のホブ軸からの距離が変化し、切れ刃ごとにその値が変化する。その距離は図3の三角形 $O_0 O P_k$ から近似的に次式で求まる。

$$R_k^2 = \epsilon^2 + R_{0k}^2 - 2 \cdot \epsilon \cdot R_{0k} \cdot \cos \xi \quad (8)$$

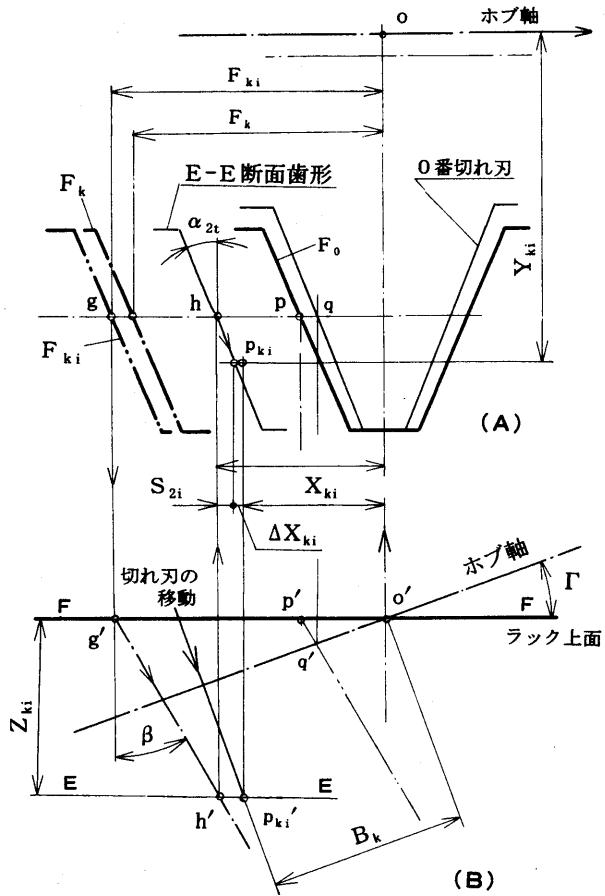


図4 創成運動によるホブ切れ刃とはすばラックの移動

$$\xi \doteq \pi \left(1 - 2 \cdot \frac{k}{G} \right) + \phi \quad (9)$$

2.2 はすばラックの創成運動

図4において F_0 は0番切れ刃の回転角 θ_i が0のときのラック上面における軸直角(正面)歯形である。 k 番切れ刃で創成されるとき、ラックのピッチ点は F_k の位置まで移動する。 k 番切れ刃が θ_i 回転するとラックはさらに F_{ki} まで移動する。その距離はラックのピッチを L_{2t} 、歯厚を s_{2t} とすると次式で表わされる。

$$F_k = L_{2t} \cdot \frac{k}{G} - \frac{s_{2t}}{2} \quad (10)$$

$$F_{ki} = F_k + L_{2t} \cdot \frac{\theta_i}{2\pi} \quad (11)$$

このとき P_k 点はラック上面から Z_{ki} 下がった位置にあるが、ラックの歯面との距離を求めるため、ねじれ角 β 傾いた線上で高さが Z_{ki} の点 h' を求め、その点の平面図 h をピッチ線上に定める。 h を含み上

面と同じ歯形を描くと、それは E-E で切断したときの歯形となる。このときその歯形と p_{ki} は同一平面上にあるのでラックの歯面との距離は次式で求まる。

$$X_{zi} = F_{ki} - Z_{ki} \cdot \tan \beta + S_{zi} \quad (10)$$

$$S_{zi} = (Y_{ki} - \frac{d_0}{2}) \cdot \tan \alpha_{2i} \quad (11)$$

$$\Delta X_{ki} = X_{zi} - X_{ki} \quad (12)$$

各切れ刃について、微小角度で回転させ、 ΔX_{ki} の最小値を抽出し、その集合として歯形を予測した。図 4 はホブを正面から見るように配置しておりラックは背面から見ている。図 5 はホブ側からラックを見た状態を立体的に示したもので、右ねじれのラックについて検討している。

2.3 インボリュートホブによる創成歯形

図 6 は解析方法が適切かどうかを判断するために $m=5$ の標準ホブと同じ寸法のインボリュートホブを想定して歯形誤差を求めたものである。理論的に誤差がないので活用できると判断した。ここではホブの切れ刃溝数を標準ホブの 2 倍の 20 として計算し、グラフを描いている。

2.4 標準ホブによる創成歯形

前節と同じく、切れ刃の歯形が直線で理論的に正しい形状とした標準ホブを正しく取り付け、正確な運動を与えて創成する場合の歯形誤差を図 7 に示す。歯先と歯元が約 $4 \mu\text{m}$ 多く削りとられることを示している。

2.5 ホブが振れて回転するとき

図 8 は誤差のない標準ホブが $30 \mu\text{m}$ オフセットされて取付けられる場合の創成歯形を予測したものである。(a) は 0 度位相がずれた場合、(b) は 90° 位相がずれた場合で、誤差の

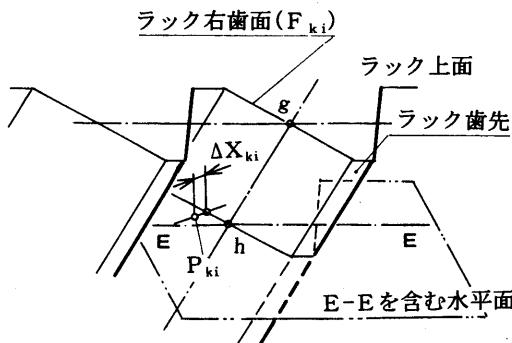


図 5 ホブの切れ刃上の点とはすばラック歯面間距離

大きさは変わらないが歯形が変わる。

3. $m=5$ 標準ホブでの実験

歯形誤差の予測はラックについて行っているが、有限歯数の円筒歯車の歯形を近似的に予測できる。表 2 に示すホブで、はすば歯車を切削し予測と比較した。

3.1 ホブの精度

使用したホブの切れ刃のリード誤差を図 10 に示す。形状精度は JIS の AA クラスを満足している。ホ

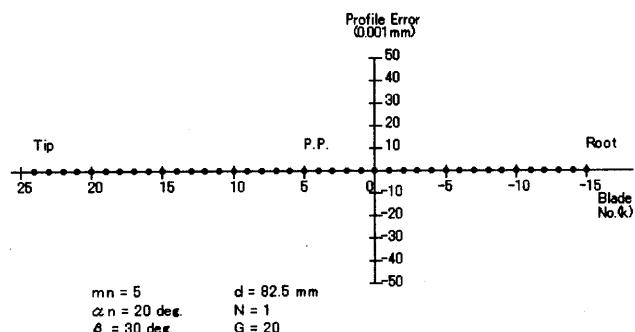


図 6 インボリュートホブによるはすばラック歯形誤差予測

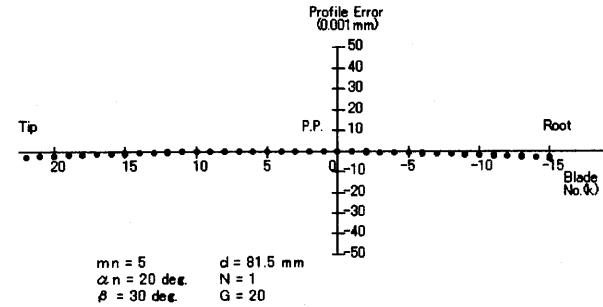


図 7 JIS 標準ホブによるはすばラックの歯形誤差予測

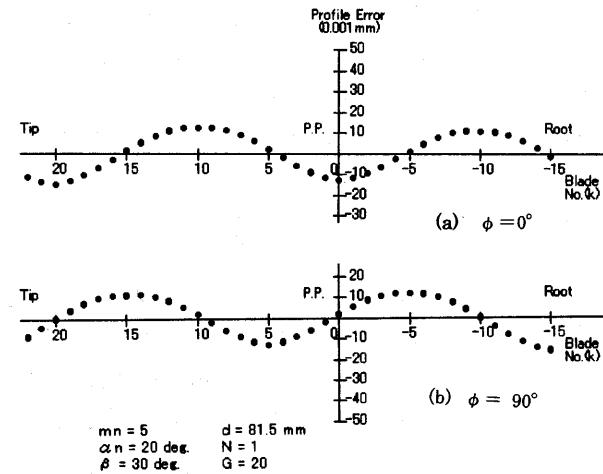


図 8 ホブが $30 \mu\text{m}$ オフセットしたときの歯形誤差予測

表2 実験に使用したホブと歯車

ホブ	はすば歯車		
モジュール m_n	5	m_t	5.774
圧力角 α_n	20°	α_t	22.796°
外径 d_a	90mm	歯数 z	20
条数 N	1	ねじれ角 β	30°
切れ刃溝数 G	10	ピッチ径 d	115.470mm
進み角 γ	3° 31'	基礎円径	106.451mm
$D+F$	11.25mm	外径 d_a	125.470mm
材質	HS53M	材質	黄銅棒
精度	AA		

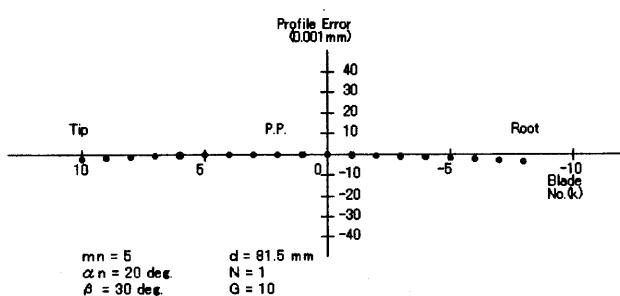
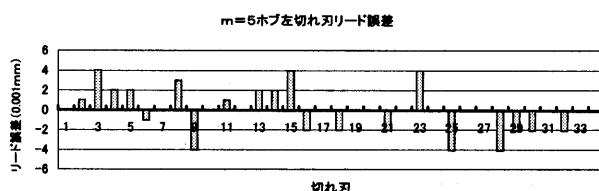
図9 $m=5$ 標準ホブによるはすばラックの歯形誤差予測（誤差のないホブで正しい創成運動を与えた場合）

図10 実際に使用したホブの左切れ刃のリード誤差

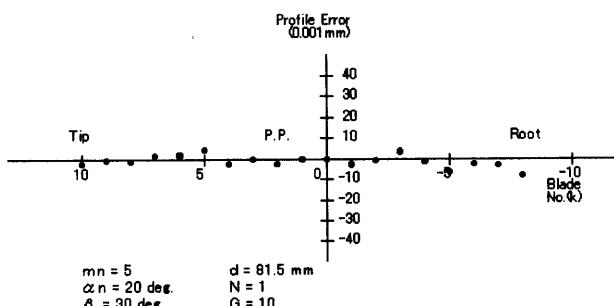


図11 正しくホブをセットし歯切りする場合の歯形誤差予測

ブをホブ盤に取付け創成中心を調査し、図10の19番切れ刃が創成中心にあった。式(3)の Δp に各切れ刃のデータを入力し歯形を予測した結果が図11である（オフセットなし）。ホブ切れ刃のピッチ誤差

表3 切削条件

切削速度	30m/min
切り込み	荒 5, 5.5mm (2回切り) 仕上げ 0.75mm
送り速度	1.5mm/rev.
切削剤	なし
ホブ盤	樺藤 KS-14

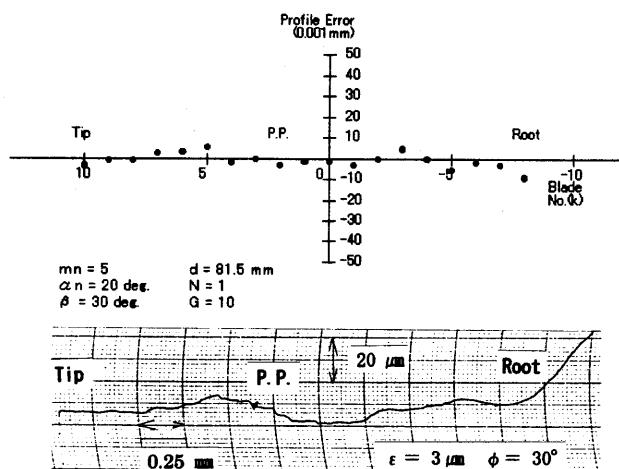


図12 オフセット量が3μmで歯切りする場合の歯形誤差

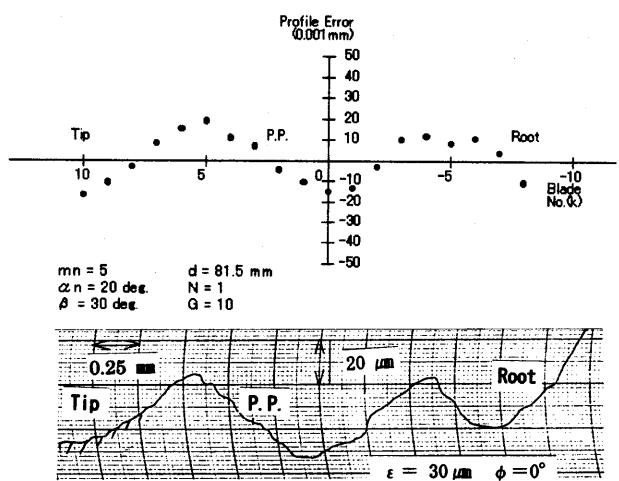


図13 オフセット量が30μmで歯切りする場合の歯形誤差

は一定でないのでホブをシフトするなどにより取付け位置が変わると歯形は変化する。切れ刃面の再研削精度も影響がでることになる。

3.2 歯切実験

歯切りは表3に示す条件で行った。図12にオフセット量が3μmのとき、図13に30μmオフセットしたときの予想歯形と切削したはすば歯車とともに右歯

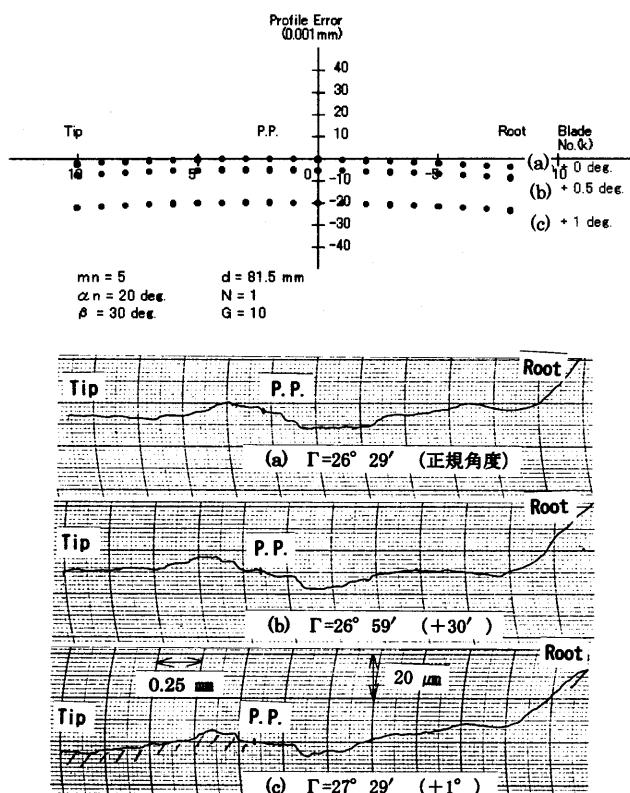


図14 ホブの取付け角と歯形誤差の関係

面歯形を示す。1条ホブで歯切りしているので歯車の各歯の歯形はほぼ同じ形状で、1例のみ示している。オフセットの位相を調査し、入力することで予測とはすば歯車歯形がほぼ一致した。

図14はホブの取付け角度を間違えた場合を想定し、その影響を示したものである。予測は誤差のないホブによるものであるが、角度を $30'$ または 1° 違えた

場合、歯形は変化せず、歯厚が小さくなることを示している。実験結果は歯形について、法線長にわずかの変化があるが、形状はほぼ同一である。歯厚を実測した結果、 1° 変化したとき平均で $18 \mu\text{m}$ 減少して、予測が実証できた。

4. 結 言

はすば歯車をホブ切りする場合、ホブの精度やその取付け精度と歯形誤差の関係を知るために、はすばラックを創成して歯車の歯形を予測する方法を考案し、解析プログラムを作成し実験を行った。その結果、

1. 三次元の動きを投影することによって二次元に変換してホブ切り機構が理解し易くなった。
2. 解析プログラムをインボリュートホブによる創成に適用し解析方法が適切なことを確認できた。
3. 計算結果は瞬時に表示され、歯形誤差の予測やホブの設計作業（多条とする場合のホブ径の設定など）で有効である。
4. 歯切作業でのホブの精度管理や取付け精度の重要性を簡単に示すことができるようになった。

今回はホブのオフセットに関して単純に全体が偏心する場合を想定したが、実際は複雑に変化する。また、歯車の誤差に関する項目は他に多くあるので、この手法発展させて解決したい。

参 考 文 献

- 1) 廣尾靖彰他2名：ホブによる平歯車の歯形創成、久留米工業高等専門学校紀要、11-2（平8-3）、1

一般論文

インターネットを用いた産業用ロボットアームの遠隔制御実験

江頭 成人

Remote Control of Industrial Robot Arm Using the Internet

Naruto EGASHIRA

1. まえがき

本校は、1994年6月にインターネットに接続され¹⁾、光ケーブルによる構内コンピュータネットワークが1996年3月に構築され²⁾、著者はこれらの活動に大きく関与してきた。これらのインターネットや構内コンピュータネットワークは、日常の事務、研究連絡等においては多いに活用されているが、研究活動における報告は少い。

一方、著者は産業用ロボットやNC工作機械等で用いられているメカトロサーボ系の制御に関する研究を佐賀大学、(株)安川電機と共同で行ってきた。1999年3月に(株)八幡電機精工製の産業用多関節ロボットであるPerformer MK-3Sを導入し、RT-Linux(Real Time Linux)³⁾によるコントローラを開発した。このRT-Linuxは、UNIX互換のOS(Operating System)であるので、コンピュータネットワークとの相性が良く、簡単にリモートコントロールへと応用することができる。

これまで、コンピュータネットワークの基盤不足および著者の知識不足等の理由で双方の活動は独立していたが、組み合わせた研究活動を行うに充分な素地ができ、折しも近年、それら2つを融合した「ロボティクスと通信」というテーマが重要視されつつある。特にインターネットとメカトロサーボ系を組み合わせた研究は、テレオペレーション、テレティーチング、リモートメンテナンス、遠隔診断等様々な応用が考えられる。

本研究においては、テレオペレーションに着目し、佐賀大学と久留米高専とのインターネットを利用したロボットの遠隔制御予備実験(2000年2月24日実施)の結果をふまえてシステムを改良し、インターネット協議会主催インターネットフェスタ'2000において久留米リサーチセンタービルと久留米高専

表1 Performer MK-3Sのパラメータ

軸	長さ[mm]	重量[kg]	ギヤ比
S	135	2.68	120
L	250	2.86	160
U	215	2.19	-160
B	100	1.46	120
T	130	0.5	80

とを無線LANで結んだロボットの遠隔制御実験(2000年3月4、5日実施)、第45回メカトロ検討会において佐賀大学と久留米高専とのインターネットを利用したロボットの遠隔制御実験(2000年3月10日実施)を行ったので、その結果について報告する。

2. インターネットを用いたロボットの遠隔制御

多くのロボットの遠隔制御においては、専用線が用いられている。そのメリットは、確実な接続が補償されており、通信時間および通信遅れ時間が一定であることである。一方、インターネットを用いた遠隔制御のメリットは、通信コストが安価であり、任意の場所から任意の場所へ接続できることである。これらのメリットは、専用線や出向の必要なく、技術者が現場のテレオペレーション、テレティーチング、リモートメンテナンス、遠隔診断等の作業ができるこことを示しており、非常に有用である。

本研究においては、技術メンテナンス用のテレオペレーションではなく、インターネットフェスタ'2000において小中学生に操作させたり、学校紹介等でデモンストレーションができるようなテレオペレーションを行うこととした。

具体的には、カメラでとらえた映像を転送しディスプレイに表示されたロボットを見ながら以下のボタン操作を行うこととした。

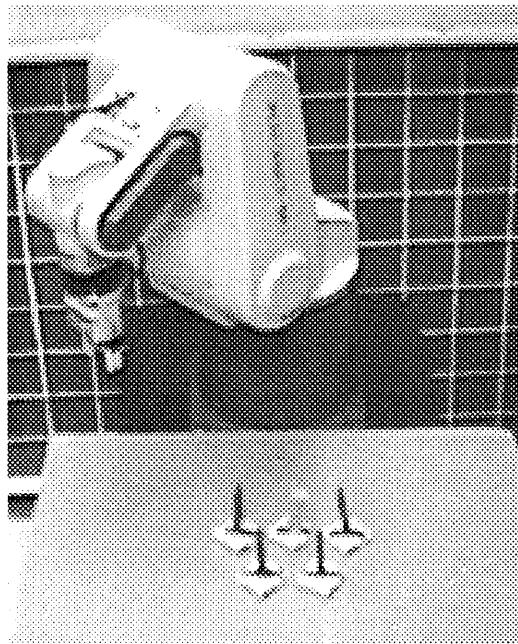


図1 台座の旋回

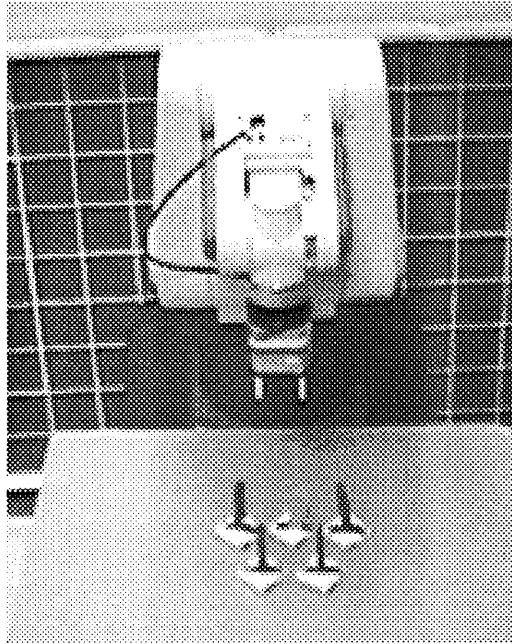


図2 アームの伸長

- (1) ボタンを押している間、ロボットの台座が旋回する（図1）
- (2) ボタンを離すと、旋回を止める
- (3) 再度ボタンを押すと、アームが伸びる（図2）
- (4) ボタンを離すと、伸びのを止める
- (5) 自動的にアームが真下に動き、目標物である旗を取り（図3）
- (6) 旗が取れれば成功で、旗が取れなければ失敗となる
- (7) 旗を元の場所に置く
- (8) 初期位置へ戻る

ボタンを押すだけの操作であり、一見簡単そうであるが、画像転送時間や平面画像での距離感等の影響で、馴れるまではかなり難しい。

実験装置の概要を図4に示す。実験装置は、実際に動作する産業用ロボット、ロボットを駆動するためのコントローラ、作業者が指令をするための入力ボタンを取り付けた遠隔制御用コントローラからなる。

2.1 産業用ロボット

産業用ロボットは、実際に作業を行うための装置であり、平成10年度末に本研究室に導入された、(株)八幡電機精工製のPerformer MK-3Sを用いた。このロボットは、5軸多関節型ロボットで、各軸はオプティカルエンコーダの取り付けられたACサーボモータによって駆動される。ロボットの可搬重量は2kgであり、パラメータは表1のとおりで

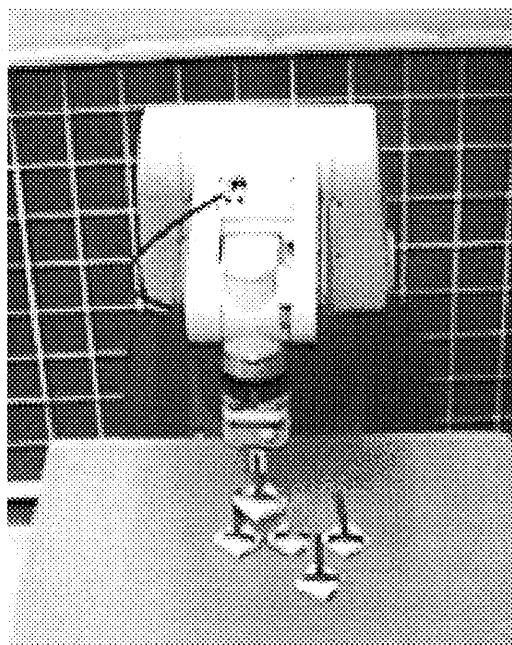


図3 目標物のピックアップ

ある。ここで、S軸は旋回軸、L軸は下腕傾動軸、U軸は上腕傾動軸、B軸は手首振り軸、T軸は手首回転軸であり、先端にはグリッパが取り付けられている。

2.2 ロボットコントローラ

ロボットコントローラは、直接ACサーボモータを駆動するためのサーボコントローラ((株)八幡電機精工製)と、上位コントローラであるコンピュー

タから構成される。サーボコントローラには速度ループおよび電流（トルク）ループが組み込まれており、コンピュータからの速度指令にしたがって速度および電流を制御する。

上位コントローラであるコンピュータは、いわゆる AT 互換機を採用し、通信を行いながら厳密なりアルタイム制御を行わせるため、リアルタイムタスクをサポートした RT-Linux を OS として採用した。ロボット制御プログラムおよび TCP/IP を用いた通信プログラムを自作した。ロボット制御プログラムにおいては、10[ms] の Real Time Task として、 $K_p=15[1/s]$ の位置ループを組み込んだ。

パルスカウンタによって読み込んだパルス数 $p_i[\text{pulse}]$ は、 $R_E=2048 \times 4$ をエンコーダ分解能、 N_i をギヤ比とすると、角度 $\theta_i[\text{rad}/\text{s}]$ は

$$\theta_i = \frac{2\pi}{RN_i} p_i \quad (1)$$

と計算できる。位置ループが作成する角速度入力 $\omega_i[\text{rad}/\text{s}]$ は

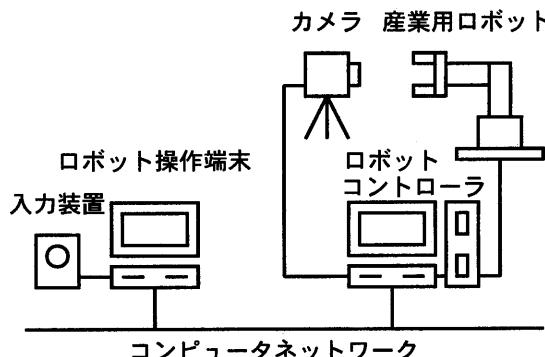


図 4 ロボット遠隔制御の構成図

$$\omega_i = K_p(u_i - \theta_i) \quad (2)$$

と計算される。モータは、 $\pm 6.0[\text{V}]$ で $\pm 3000 [\text{rpm}] = \pm 50[\text{rps}] = \pm 50 \times 2\pi = \pm 100\pi [\text{rad}/\text{s}]$ 回転するので、アームは $\pm \frac{100\pi}{N_i} [\text{rad}/\text{s}]$ 回転する。したがって、サーボドライバに加える電圧 $v_i[\text{V}]$ は

$$v_i = -\frac{6.0N_i}{100.0\pi} \omega_i \quad (3)$$

と計算される。(1)～(3) 式を 10[ms] ごとに実行して、位置制御を行わせた。

遠隔制御用コントローラとの通信は、TCP/IP を用いて非同期に行うプログラムを自作した。

2.3 遠隔制御用コントローラ

遠隔制御用コントローラは、どこからでも遠隔制御ができるようにノート型コンピュータを採用した。OS としてはネットワークに強い FreeBSD を採用し、パラレルポートに取り付けられたプッシュボタン、およびその状態を読みとるためのデバイスドライバと状態をロボットコントローラに送信するための通信プログラムを自作した。

3. 予備実験

久留米高専 LAN を用いた教官室一研究室の遠隔制御の実験に成功したので、画像転送の状況を調査することを目的として、佐賀大学一久留米高専間のインターネットを用いた遠隔制御予備実験を行った。

3.1 システム構成

本実験の概念図を図 5 に、構成図を図 6 に示す。佐賀大学と久留米高専は、九州大学を中心にそれぞ

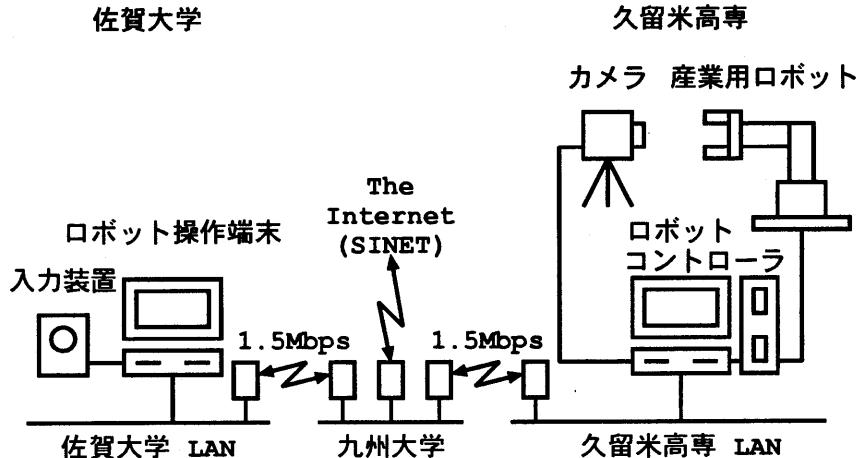


図 5 佐賀大学一久留米高専ロボット遠隔制御システム概念図

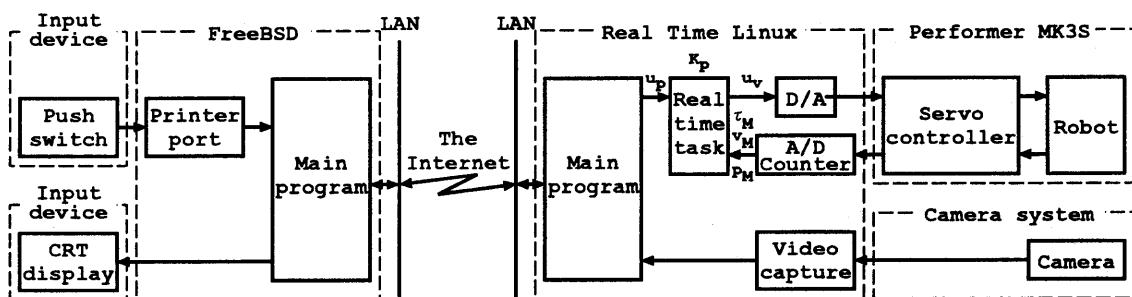


図 6 佐賀大学一久留米高専ロボット遠隔制御システム構成図

リサーチセンタービル

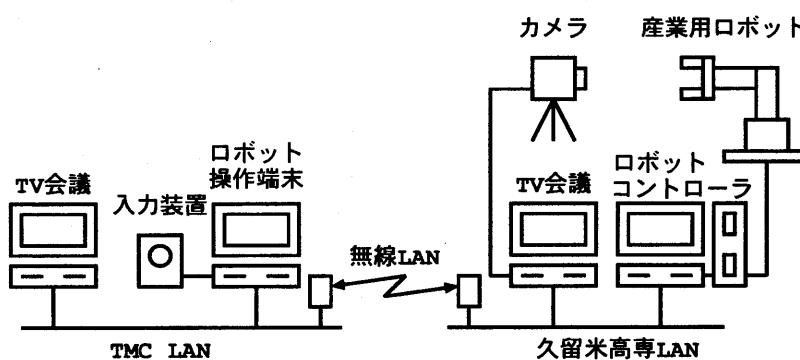


図 7 リサーチセンタービル一久留米高専ロボット遠隔制御システム概念図

れ1.5[Mbps] の専用回線で接続されている。

システム構成としては、前章の基本構成そのままであった。画像転送としては、xawtv という TV ソフトウェアを用いてキャプチャリングを行い、Remote X Window System 上に直接表示させる方法を採用した。

3.2 実験結果

2000年 2月 24日 14:00~14:25に実験を行った。本方法で採用した画像転送は簡単であるが、ベタ画像を転送するため情報転送量が増え、転送時間がかかることが問題であることはわかっていた。心配していた通り、画像転送が著しく遅く、ロボットの画像が更新されず、画像を見ながらの制御実験はできなかった。

通信時間遅れは、理論値で10[ms] 以下であるが、実際の ping の結果では

100 packets transmitted,
94 packets received,
6% packet loss
round-trip min/avg/max/stddev
=34.500/86.835/794.254/114.913 ms

となっており、平均で87[ms] の遅れがあり、しかも約20回に 1 回の割合でパケットが到達しないこと

がわかった。その原因を解明するために、久留米高

専一九州大学間の ping を行ってみたところ

100 packets transmitted,

100 packets received,

0% packet loss

round-trip min/avg/max/stddev

= 11.763/16.601/75.206/9.913 ms

という結果が得られ、高速な通信ができているのに対し、佐賀大学一九州大学間は

100 packets transmitted,

100 packets received,

0% packet loss

round-trip min/avg/max/stddev

= 19.683/52.131/706.657/74.701 ms

と、3倍以上の応答時間がかかっていることがわかつた。これは、利用者の絶対数が問題であると考えられる。

このため、画像転送を伴う実験を行うには、以下の対処が考えられる。

- (1) 画質を粗く取る、色数を減らす等、情報量を減らすこと
- (2) 画像データを圧縮し、転送時間を短縮すること
そこで、これらの条件を満足するアプリケーショ

ンソフトウェアとして、MS-Windows用のTV会議システムであるMicroSoft NetMeetingを採用することとした。

4. 久留米高専リサーチセンタービル間

本システムの目的は、3月4、5日にリサーチセンタービルで行われたインターネットフェスタ'2000において、久留米高専の出し物であった。無線LANとロボットの遠隔制御の2つの公開実験を兼ねていた。

ロボットの遠隔制御の操縦者は、小中学生を対象にしており、簡単な操作で大きな宣伝効果（久留米高専の受験者数の増加、共同研究等）を期待していた。

4.1 システム構成

本実験の概念図を図7に示す。無線LANの速度は、最も条件の良い時で11[Mbps]とされているが、これまでの実験においては、2[Mbps]が限界のようで、気象条件が悪いとそれ以下に落ちる可能性が高い。

ロボット遠隔制御システムは、先の佐賀大学との

実験の反省を踏まえて、画像転送アプリケーションソフトウェアとして、MS-Windows用のTV会議用アプリケーションであるMicroSoft NetMeetingを採用した。このNetMeetingは、電話回線でも利用できるように作られており、画像とともに音声もやり取りすることができ、双方の意志の疎通には欠かせない道具となり得る。

4.2 実験結果

3月3日午後～5日夕方の間、無事に動作を続けることができた。目標物をつかむ成功率は、約三人に一人程度であった。

4.3 考察

無線LANの接続状況は、以下のように良好であった。

100 packets transmitted,

100 packets received,

0% packet loss

round-trip min/avg/max

=3.9/3.9/6.0 ms

特に3月4日は気象条件が悪く見通しが効かない状態ではあったが、2[Mbps]を確保でき、充分納得

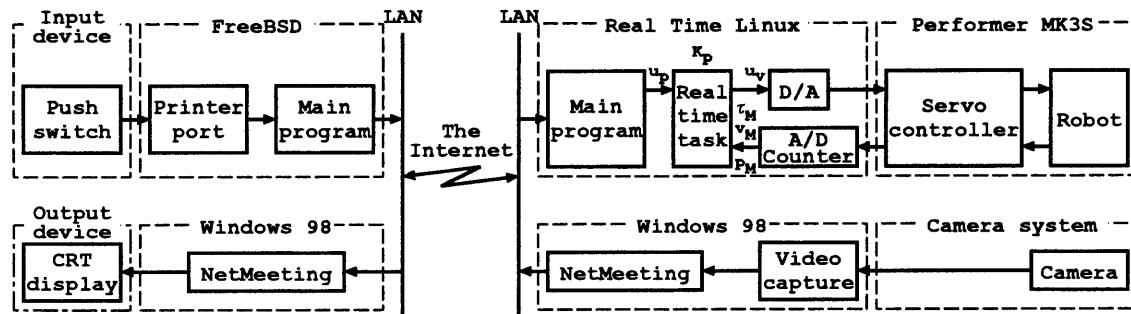


図8 リサーチセンタービルー久留米高専ロボット遠隔制御システム構成図

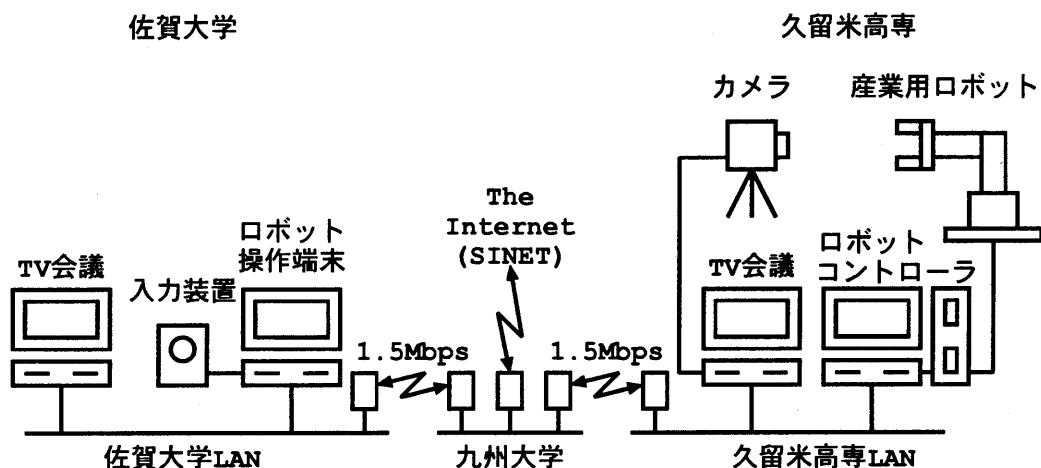


図9 佐賀大学一久留米高専ロボット遠隔制御システム概念図

できる結果が得られた。

以上のように、無線 LAN と RT-Linux の安定性の検証を行うことができた。

5. 久留米高専一佐賀大学間

本実験の目的は、ロボットの遠隔制御が今後の研究のテーマとなり得るかどうかをみきわめるため、共同研究を行っている佐賀大学と（株）安川電機の共同研究セミナー（第45回メカトロ検討会）において、実験を行った。

5.1 システム構成

本実験の概念図を図9に示す。図7との違いは、佐賀大学と久留米高専が九州大学を中心にそれぞれ 1.5[Mbps] の専用回線となったことである。

5.2 実験結果

佐賀大学と久留米高専間の通信時間がかかるため、画像転送がリサーチセンタービルの時より非常に遅くなつたが、その遅れ時間を見込むことにより、5 回中 1 回成功し、本システムの有用性が確認できた。

6. ま と め

ロボット技術とインターネットに代表されるコンピュータネットワーク技術を結びつけたインターネットロボットの作成を行い、実験に成功した。このシステムは、インターネットフェスタ、学校見学会（2000年10月28日、同室内で実験）、文化祭（2000年11月3、4日、電子計算機室より遠隔制御実験）等で活躍し、有用性が確認できた。

参 考 文 献

- 1) 江頭、大淵、松本、馬場、佐塚：久留米高専のインターネットと久留米地区学術系NOCについて、久留米工業高等専門学校紀要、第13巻、第2号、pp.39-43、1998.3.
- 2) 松本、江頭、馬場：校内ネットワークシステムの構成、久留米工業高等専門学校紀要、第12巻、第1号、pp.45-52、1996.9.
- 3) 船木、羅：LINUX リアルタイム計測／制御ガイドブック、秀和システム、1999.1.

一般論文

1-(4-Methylphenyl)ethyl pentafluorobenzoateのソルボリシス中に
生成するイオン対からの原系復帰の速度

辻	江	栗	西	豊
正	頭	原	田	彦*
*	隆*			

The Rate of Ion-Pair Return in the Solvolysis of
1-(4-Methylphenyl)ethyl Pentafluorobenzoate

Yutaka	TSUJI
Masahiko	EGASHIRA*
Takashi	KURIHARA*
Masayuki	NISHIDA*

In the solvolysis reaction, the investigation of the behavior of carbocationic intermediate(s) is one of the subject of continuing interest. The azide clock has been established as the measurement method of the rate constant for the reaction of carbocation with solvent, and the behavior of carbocation has been discussed especially for 1-phenylethyl cation. The rate of ion-pair return have not been determined. The ^{18}O -scrambling within ester oxygens in the reactant is the most powerful and elegant tool for the detection and its quantification of the return from ion-pair intermediate(s). The ^{18}O -scrambling within starting benzoate during the solvolysis of the alkoxy ^{13}C (98% enriched), ^{18}O (45% enriched) double labeled 1-(4-methylphenyl)ethyl pentafluorobenzoate in 50% aq. 2,2,2-trifluoroethanol ($\mu = 0.5$) was determined by ^{13}C -NMR spectrometry utilizing the split ^{13}C -NMR signals of alkoxy carbon induced by $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ isotopic substitution. The rate constant of $7.87 \times 10^9 \text{ (s}^{-1})$ for the ion-pair return of 1-(4-methylphenyl)ethyl cation and pentafluorobenzoate is calculated.

1. はじめに

現在の有機化学の発展には目覚ましいものがある。色々な機能を持った新しい化合物が次から次に合成されている。この背景に、有機電子論を中心とした、反応機構の確立があることは忘れてはならない。ソルボリシスは反応機構の議論の中心に位置している。

一般に $\text{S}_{\text{N}}1$ ソルボリシス反応は脱離基のイオン解裂によって炭素陽イオン中間体を生ずるが、この中間体として、安定性の異なるイオン種、intimate イオン対 (I), 溶媒介在イオン対 (II), および遊離イオン (III) の介在が知られており、各々の中間体から通常原系復帰は起こり得る(図1)。従って、原系復帰の検出およびその定量はソルボリシス機構の完全解析には必要不可欠である^{1)~3)}。

原系復帰の研究として、Goering らの ^{18}O -Scrambling 法による研究が有名である⁴⁾。脱離基

に Benzoate または Sulfonate を用いた反応において、Alkoxy 酸素等の特定酸素を ^{18}O でラベルしておけば、原系基質内の ^{18}O の交換を追跡することにより、原系復帰の情報を得ることができる。彼らは、マススペクトルにより ^{18}O -Scrambling を検出しているため、反応混合物からの原系基質の単離、生成、特定結合の切断などの繁雑な操作が必要であり、一般的な通用までにはいたらなかった。最近、藤尾らは ^{13}C -NMR をもちいた ^{18}O -Scrambling の検出法を確立している⁵⁾。この方法は、比較的高磁場の ^{13}C -NMR スペクトルでは、Alkoxy- ^{16}O のピークと Alkoxy- ^{18}O のピークは分離したピークとして観測される^{6)~8)}ことを利用しており、封管した NMR チューブ内で比破壊的に測定できるため、簡便で、定量性



図1 Winstein らのイオンペア機構

がよい。我々はこの方法を用いトリラート基質のソルボリシス反応の原系復帰について検討を行ってきた⁹⁾。しかし、¹⁸O-Scrambling 法による解析では、中間体からの原系復帰と生成物生成の比が求められるのみであり、未だに中間体からの原系復帰の速度が求められた例はない。

さて、炭素陽イオンの反応に関して、Richard らの研究が特筆される¹⁰⁾。彼らは、炭素陽イオンと N₃⁻ が拡散律速 (5×10^9 (s⁻¹M⁻¹)) により反応する事を用い、N₃⁻ 存在下におけるソルボリシスの生成物の生成比から炭素陽イオン中間体と溶媒との反応速度定数の測定法を提案した。彼らは、この方法によりソルボリシス中に生成する置換 1-phenylethyl cation と溶媒の速度定数を求めている。イオン対からの速度生成の速度が求められる反応において、生成物生成と原系復帰の比が求められるなら、原系復帰の速度を求めることができる。そこで、Richard らにより炭素陽イオン中間体の反応速度が求められている、1-(4-Methylphenyl)ethyl pentafluorobenzoate のソルボリシスにおいて、原系 Benzoate 内の ¹⁸O-Scrambling の測定を行った。中間体からの原系復帰の速度も含めて、このソルボリシスの詳細機構について検討する。

2. 実験

2.1 合成

4-Methylbenzoic acid carbonyl-¹³C

200ml の 4-Methylphenyl Grignard 試薬 (0.45 mol/l) に ¹³CO₂ (Aldrich, ¹³C, 99atom%) を室温で 1l 吹き込んだ。終夜攪拌後、200ml の 10% HCl で分解、Ether 抽出 (100ml × 5 回), 10% NaOH 水溶液で逆抽出 (100ml × 3 回) を行った。得られた水層を濃塩酸で十分酸性にし、得られたカルボン酸をろ取し、乾燥した。

4'-Methylacetophenone carbonyl-¹³C

4'-Methylacetophenone carbonyl-¹³C の合成は Rubottom らの方法を参考にして行った¹¹⁾。4-Methylbenzoic acid carbonyl-¹³C (7.9g, 57.8 mmol) の Dry Tetrahydrofuran (400ml) 溶液に 0°C において 1.4mol/l の Methyl lithium Pentane 溶液 (関東化成株式会社) 200ml を滴下した。2 時間攪拌後、室温に戻し、反応溶液に Trimethylchlorosilane (116g, 1.06mol) を滴下した。2 時間攪拌後、200ml の 10% HCl を滴下、Ether 抽出、飽和食塩水で洗浄後、得られた Ether 溶液を MgSO₄ で乾燥した。Ether をエバポレート

し、残った物質を、シリカゲルカラムによって精製した。得られた物質の収量は 5.4g であり、この反応の収率は 69% だった。

1-(4-Methylphenyl)ethyl alcohol alkoxy-¹³C

1-(4-Methylphenyl)ethyl alcohol alkoxy-¹³C は 4'-Methylacetophenone carbonyl-¹³C の NaBH₄ 還元により合成した。4'-Methylacetophenone carbonyl-¹³C (5.4g, 40mmol) を Ethanol (70ml) に溶かし、NaBH₄ (1g, 26mmol) を加え、室温で終夜攪拌した。Ethanol をエバポレートし、水を加え一時間攪拌後、Ether 抽出、飽和食塩水で洗浄、MgSO₄ で乾燥した。Ether をエバポレートし、残った生成物を、シリカゲルカラムによって精製した。得られた物質の収量は 4.0g であり、この反応の収率は 72% だった。¹H-NMR (400MHz, CDCl₃): δ 7.27 (dAB, 2H, J_{HH}=8.0Hz, J_{CH}=4.0Hz), 7.16 (AB, 2H, J=8.0Hz), 4.87 (dq, 1H, J_{HH}=6.4Hz, J_{CH}=143.6Hz), 2.34 (s, 3H), 1.72 (br, 1H), 1.49 (dd, 3H, J_{HH}=6.4Hz, J_{CH}=4.0Hz).

Alkoxy-¹³C, ¹⁸O-1-(4-methylphenyl)ethyl alcohol

1-(4-Methylphenyl)ethyl alcohol の ¹⁸O での濃縮は酸触媒による OH の交換反応を用いた。1-(4-Methylphenyl)ethyl alcohol alkoxy-¹³C (1g, 7.2mmol) を 0.1mol/l の HClO₄ を含む H₂¹⁸O (SHOKO CO., LTD. ¹⁸O, 98-99Atom%) 中、室温で一週間攪拌した。反応混合物を Ether に注ぎ、水洗、硫酸マグネシウムで乾燥した。Ether をエバポレートし、残った生成物を、次の反応にもちいた。

Alkoxy-¹³C, ¹⁸O-1-(4-methylphenyl)ethyl pentafluorobenzoate

Alkoxy-¹³C, ¹⁸O-1-(4-methylphenyl)ethyl pentafluorobenzoate は Richard らの方法を参考にして合成した¹²⁾。Alkoxy-¹³C, ¹⁸O-1-(4-methylphenyl)ethyl alcohol (345mg, 2.48mmol) を Pyridine (4 ml) に溶かし、0 °C で 20 分攪拌した。その後、Pentafluorobenzoyl chloride (1g, 4.2mmol) を加え、0 °C で 1 時間、室温で 30 分攪拌した。冷やした NaHCO₃ 鮑和溶液 (30ml) を反応溶液に加え、析出した結晶をろ取し、Ether-Hexane から再結晶した。収量は 0.48g であり、収率は 52% だった。融点 : 62-63 °C, ¹H-NMR (400MHz, CDCl₃): δ 7.31 (dAB, 2H, J_{HH}=8.0Hz, J_{CH}=4.0Hz), 7.18 (AB, 2H, J=8.0Hz), 6.12 (dq, 1H, J_{HH}=6.8Hz, J_{CH}=149.6Hz), 2.35 (s, 3H), 1.66 (dd, 3H, J_{HH}=6.8Hz, J_{CH}=4.0Hz).

2.2 測定

反応は Richard らの条件と同じ条件で行った¹⁰⁾。Alkoxy-¹³C, ¹⁸O-1-(4-methylphenyl)ethyl pentafluorobenzoate (20mg) を 200ml の 50% (v/v) 水-2,2,2-トリフルオロエタノール ($\mu = 0.5$, NaClO₄) に溶かし (基質の濃度は 0.3mM), 25°Cにおいて48時間反応させた。濃度が薄いため、反応物を Ether で回収し、CDCl₃ 溶液を調製し、¹³C-NMR 測定を行った。再現性を見るため、同じ反応を22.5時間でも行った。

Proton-decoupled ¹³C-NMR は日本電子株式会社製 Alfa-500 FT-NMR スペクトロメーター (¹³C の共鳴周波数 125.6MHz) によって測定された。はじめに観測周波数 40kHz, データーポイント 36k で全体の測定を行い、1-(4-Methylphenyl)ethyl pentafluorobenzoate の Alkoxy 炭素のケミカルシフトを CDCl₃ のピーク (77.0ppm) を基準として決めた。この炭素のケミカルシフトは、TMS を 0 ppm としたとき、75.52ppm である。そして、この炭素を観測中心として、精密測定を行った。この時のデーター取込みの条件は、観測周波数 250Hz, データーポイント 8000 (0.03Hz/point), 繰返し時間 8 秒, 45° パルスである。C-¹⁸O と C-¹⁶O の比は積分曲線により決めた。

3. 結果と考察

測定にもちいた 1-(4-Methylphenyl)ethyl pentafluorobenzoate の反応中心炭素部分の ¹³C-NMR スペクトルを図 2 に示す。明かに二本の分裂したピークとして観測される。75.52ppm が C-¹⁶O のピークであり、その 0.039ppm (4.9Hz) 高磁場

が C-¹⁸O のピークである。1-(4-Methylphenyl)ethyl alcohol を ¹⁸O で濃縮しているとき、¹³C-NMR により不純物のピークが成長してきたので、反応を中断した。このため ¹⁸O で 100% 濃縮した基質は得られなかつたが、Alkoxy 炭素が ¹⁶O と ¹⁸O で分裂して観測されることから、この基質の ¹⁸O-Scrambling の検出法として、¹³C-NMR が有効であることが確認された。しかも、十分に定量可能なほど分裂している。これら二つのピークの積分曲線から得られる比は C-¹⁶O : C-¹⁸O = 1.22 : 1.00 だった。この比から、¹⁸O の濃縮率は 45% であると計算される。48時間反応後の反応中心炭素部分の ¹³C-NMR スペクトルを図 3 に示す。ここで注目される点は、¹³C-¹⁶OC(¹⁶O) のピークの 0.006ppm (0.8Hz) 高磁場に新たなピークが観測されることである。これは、¹³C-¹⁶OC(¹⁸O) のピークであり、この反応中で、イオン種中間体からの原系復帰が存在することを示す確実な証拠となる。反応がイオン化能の高い条件で行われていることを考慮すれば、これは驚くべき事実である。¹³C-¹⁶OC(¹⁶O) のピークと ¹³C-¹⁶OC(¹⁸O) のピークの分離が不完全なため、積分はこれらのピークをまとめて取り、出発物質の ¹⁸O 濃縮率により計算した。反応率は HPLC により求めた、 $k_t = 1.06 \times 10^{-5} (\text{s}^{-1})$ を用いて計算した。表 1 に出発物質の Alkoxy-¹⁸O の濃縮率が 100% であると仮定した場合の各時間における ¹³C-¹⁶OC(¹⁸O) ester (R-¹⁶OPFBa) と ¹³C-¹⁸OC(¹⁶O) ester (R-¹⁸OPFBa), 生成物の百分率がまとめてある。ここで、イオン解裂により生成した Benzoate の二つの酸素原子が完全に等価になったと仮定すると、原系復帰により生成する R-¹⁶OPFBa と R-¹⁸OPFBa の比は 1 : 1 になる。従つ

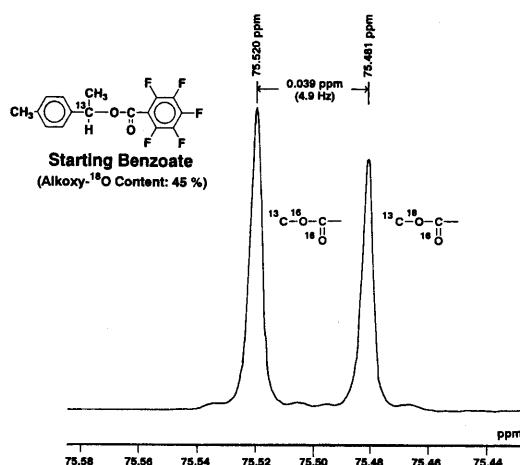


図 2 反応に用いられた 1-(4-Methylphenyl)ethyl Pentafluorobenzoate の Alkoxy 炭素部分 ($\delta = 75\text{ppm}$) の ¹³C-NMR スペクトル

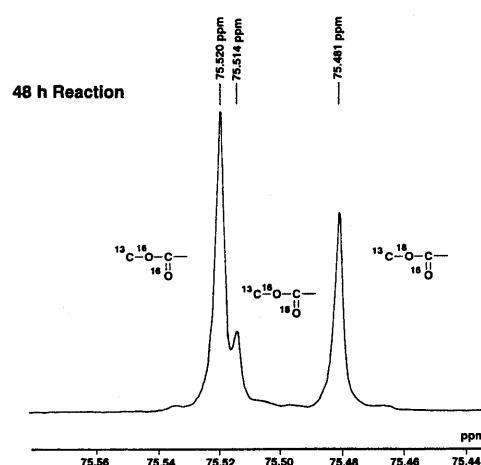


図 3 48時間反応後、回収された 1-(4-Methylphenyl)ethyl Pentafluorobenzoate の Alkoxy 炭素部分 ($\delta = 75\text{ppm}$) の ¹³C-NMR スペクトル

表 1 50% 水性 2,2,2-Trifluoroethanol (イオン強度 0.5) 中, 25°C における
1-(4-methylphenyl)ethyl pentafluorobenzoate のソルボリシスター

Time (h)	—Composition ^{a)} —			Total ^{e)} OPFBa	Unsolv. ^{f)} OPFBa	Total ^{g)} Return	$10^5 k_i^{h)}$ (s ⁻¹)
	[¹⁶ O] ^{b)}	[¹⁸ O] ^{c)}	Products ^{d)}				
0	0	100	0	—	—	—	—
22.5	5.66	36.79	57.54	42.46	31.13	11.32	1.44
48	3.82	12.26	83.92	16.08	8.44	7.64	1.43

a) Corrected by ¹⁸O content (45.15%) of starting 1-(4-methylphenyl)ethyl pentafluorobenzoate.
b) Alkoxy-¹⁶O, carbonyl-¹⁸O 1-(4-methylphenyl)ethyl pentafluorobenzoate. c) Alkoxy-¹⁸O, carbonyl-¹⁶O 1-(4-methylphenyl)ethyl pentafluorobenzoate. d) Calculated from $k_t = 1.058 \times 10^{-5}$ (s⁻¹). e) [¹⁶O] + [¹⁸O]. f) [¹⁸O] - [¹⁶O]. g) [¹⁶O] × 2. h) $k_i \times t = \ln(100 / ([^{18}\text{O}] - [^{16}\text{O}]))$.

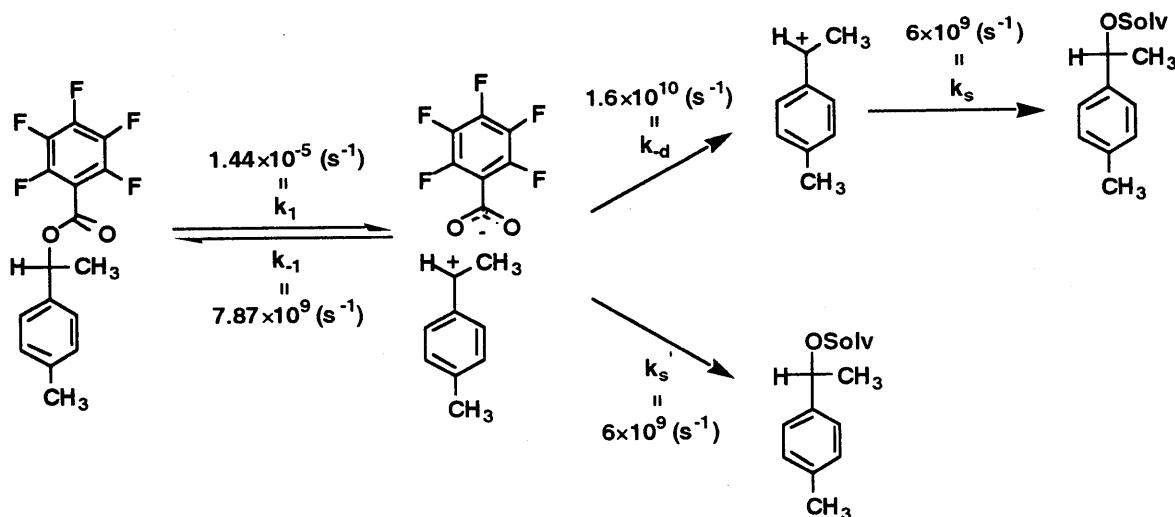


図 4 1-(4-Methylphenyl)ethyl Pentafluorobenzoate の詳細機構

て、未反応の Benzoate (Unsolvd. OPFBa) の量は、[R-¹⁸OPFBa] から [R-¹⁶OPFBa] を引くことによって求めることができる。

$$k_i \times t = \ln([OPFBa]_{t=0} / [Unsolvd. OPFBa]_t) \quad (1)$$

式 (1) より、イオン化の速度定数 (k_i) は、22.5 時間、 $1.44 \times 10^{-5} (\text{s}^{-1})$ 、48 時間、 $1.43 \times 10^{-5} (\text{s}^{-1})$ が計算される。この二つの値は誤差範囲内で良く一致しており、データーの信頼性が示されている。今後の解析にはこの反応の k_i として、平均値の $1.44 \times 10^{-5} (\text{s}^{-1})$ を今後の計算に使用する。

中間体を経由する反応の解析では、定常状態近似がもちいられる。この場合、生成物生成速度は、式 (2) で表すことができる。

$$k_t = k_i k_2 / (k_{-i} + k_2) \quad (2)$$

ここで、F を k_t / k_i で定義すると、中間体から、生

成物生成の速度と原系復帰の速度の比は F : (1-F) によって知る事が出来る。この反応における F 値は 0.74 であり、従って、原系復帰は生成物生成のおよそ三分の一であることがわかった。

さて、Richard らは、この反応中の 1-(4-Methylphenyl)ethyl cation と溶媒との一次速度定数が $6 \times 10^9 (\text{s}^{-1})$ であり、イオン対解離の速度 $1.6 \times 10^{10} (\text{s}^{-1})$ と拮抗することから、イオン対からの生成物生成が無視できることを述べている¹⁰⁾。この反応では、高濃度の ClO₄⁻を共存させているので、溶媒分離型イオン対からの原系復帰は考えなくて良い。さらに、反応によって生成した、Pentafluorobenzoate の濃度を考えると、イオン対の解離によって生成したフリーな 1-(4-Methylphenyl)ethyl cation は 100% 生成物を生成すると考えてよい。従って、イオン対から生成物を生成する反応は、直接生成物を生成する経路と、フリーな 1-(4-Methylphenyl)ethyl cation を経由す

る経路が存在し、この二つがF値を構成する反応になる。今回求めた、中間体から生成物を形成する速度と原系復帰の速度の比を用いると、中間体からの原系復帰の速度を求めることができる。この反応では、 $7.87 \times 10^9 (\text{s}^{-1})$ の速度定数が得られる。この値は中間体からの原系復帰の速度を見積もった、最初の例と言えるであろう。

得られた速度定数を反応機構図に当てはめると、図4のようになる。すなわち、この溶媒中で、基質は $1.44 \times 10^{-5} (\text{s}^{-1})$ の速度によりイオン化し、イオン対を形成する。このイオン対には下記の三つの反応を、それぞれの反応速度により起こす。

- 1) 切れた脱離基と再び結合する経路 ($7.87 \times 10^9 (\text{s}^{-1})$)
 - 2) 切れた脱離基が解離し、フリーなイオンを生成し、溶媒と反応する経路 ($1.6 \times 10^{10} (\text{s}^{-1})$)
 - 3) イオン対が溶媒と反応する経路 ($6 \times 10^9 (\text{s}^{-1})$)
- これらのことから、反応中に生じるイオン対の寿命を半減期で表すならば、 $2.3 \times 10^{-11} (\text{s})$ と言うことになるであろう。この短寿命の化学種が基質のイオン化の後に生成し、上記の反応のために消失していくことが明らかになった。

参考文献

- 1) C.J. Lancelot, D.J. Cram, and P.v.R. Schleyer, "Carbenium Ions," eds by G.A. Olah and P.v.R. Schleyer, John Wiley, N.Y. (1972), Vol.3, Chapter 27.
- 2) D.J. Raber, J.M. Harris, and P.v.R. Schleyer,

"Ions and Ion Pairs in Organic Reactions," ed by M. Szwarc, John Wiley, New York (1974), Vol.2, Chapter 3.

- 3) J.M. Harris, *Prog. Phys. Org. Chem.*, **11**, 89 (1974).
- 4) H.L. Goering and J.F. Levy, *J. Am. Chem. Soc.*, **84**, 3853 (1962); H.L. Goering and H. Hopt, *ibid.*, **93**, 1224 (1971); H.L. Goering and B.E. Jones, *ibid.*, **102**, 1628 (1980).
- 5) M. Fujio, F. Sanematsu, Y. Tsuno, M. Sawada, and Y. Takai, *Tetrahedron Lett.*, **29**, 93 (1988); M. Fujio, F. Sanematsu, Y. Tsuno, M. Sawada, and Y. Takai, *Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., Ser C*, **16(2)**, 193 (1988); *Nippon Kagaku Kaishi*, 1371 (1989).
- 6) D.A. Forsyth, "Isotopes in Organic Chemistry," eds. by E. Euncel and C.C. Lee, Elsevier, Amsterdam (1984), Vol.6, Chapter 1.
- 7) M. Sawada, Y. Takai, C. Chang, T. Hanafusa, and S. Misumi, *Anal. Chem.*, **58**, 231 (1985).
- 8) J.M. Risley and R.L. Van Etten, *J. Am. Chem. Soc.*, **101**, 252 (1979); J.E. Parente, J.M. Risley and R.L. Van Etten, *ibid.*, **106**, 8156 (1984); J.M. Risley and R.L. Van Etten, "Isotope Effects in NMR Spectroscopy." Spring-Verlag, Berlin Heidelberg (1990), p 81.
- 9) Y. Tsuji, K. Yatsugi, Fujio, M.; Tsuno, Y. *Tetrahedron Lett.*, 1995, **36**, 1461; Tsuji, Y.; Kim, S.-H.; Saeki, Y.; Yatsugi, K.; Fujio, M.; Tsuno, Y. *Tetrahedron Lett.*, 1995, **36**, 1465.
- 10) J.P. Richard, M.E. Rothenberg, and W.P. Jencks, *J. Am. Chem. Soc.*, **106**, 1361 (1984).
- 11) G.M. Rubottom and C.W. Kim, *J. Org. Chem.*, **48**, 1550 (1983).
- 12) J.P. Richard, T.L. Amyes, L. Bei, and V. Stubblefield, *J. Am. Chem. Soc.*, **112**, 9513 (1990).

一般論文

ある種の非線形境界値問題に対する Hermite 近似の 応用による射的数値解法

杠 一郎

**A Shooting Method by Applying Hermite Approximation for
Solving a Type of Non-Linear Boundary Value Problems**

Kenichirou YUZURIHA

This paper is a research on a solution by the application of a shooting method by using a high-order predictor-corrector method applying Hermite approximation for solving a model of non-linear boundary value problems:

$$y'' + p(x, y)y' + q(x, y)y = r(x, y), \quad y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad p, q, r \in C^5$$

The summary is as follows.

- 1) The idea is developed to improve the accuracy of the proposed solution in the previous paper²⁾ on the non-linear boundary value problems.
- 2) The solution is a shooting method of using a high order predictor-corrector method applying Hermite approximation.
- 3) As the result, it was confirmed that solution of high-order accuracy could be obtained by computing various examples. That is, we got a better approximate solution than that of the previous paper²⁾.

1. 緒 言

微分方程式を解く場合、解析的に厳密な解が求まるのは、方程式が一定の形をした特別な場合に限られるので、いろいろな手法の数値解法が研究されている。ところで、境界値問題についての既知の数値解法は、差分法、変分法（有限要素法）、選点法（collocation method）、予測子・修正子法そして射的法（shooting method）等である。本解法の主な内容は、1. 参考文献1）で研究した初期値問題の解法に、射的法の考えを組み入れて境界値問題の数値解法に発展させた。2. 射的法の出発値の鍵になる境界初期点における解の微係数の近似値を Hermite 近似を応用して求めた。3. Hermite 近似を応用して独自に作成した高位の修正子公式を、予測子公式と連携させて射的法の考えに活用し、境界終点において、収束条件をみたすように上記2. の微係数を修正反復して数値解の精度を高めた。4. 数値実験の結果、参考文献2）の数値実験例よりも高い精度の数値解が得られた。数値例については本論の中で述べる。

2. 問題とその解法

2.1 境界値問題と境界初期近似微係数の計算

本論では、一意解をもつ次の形の 2 階非線形境界値問題

$$y'' + p(x, y)y' + q(x, y)y = r(x, y), \quad y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad p, q, r \in C^5 \quad (2.1.1)$$

に対する離散数値解法を考える。任意の 2 点における境界条件の場合は、線形変換により単位区間における境界値問題に帰着できる。本解法では境界初期点における微係数の近似値をいかにして求めるかが 1 つの鍵になるが、それを求めるのに、Hermite 近似を応用した。さて、区間 $[0, 1]$ において C^5 級の任意の関数 $y(x)$ に対する 3 次の Hermite 補間多項式 $p(x)$ は、条件

$$p^{(j)}(x_i) = y^{(j)}(x_i) \quad (i=1,2, j=0,1), \quad x_1=0, \quad x_2=1 \quad (2.1.2)$$

をみたす関数として、次のように求められる。簡単のために $y'(x_i) = y'_i$ と表すと

$$p(x) = \{y'_0 + y'_1 + 2(y_0 - y_1)\} x^3 + \{3(y_1 - y_0) - 2y'_0 - y'_1\} x^2 + y'_0 x + y_0 \quad (2.1.3)$$

ところで、 $y(x)$ と $p(x)$ の差は、 $y \in C^4[0,1]$ のとき

$$y(x) - p(x) = \frac{x^2(x-1)^2}{24} y^{(4)}(\xi), \quad 0 < \xi < 1 \quad (2.1.4)$$

と表される（参考文献 3）。上式を、2 回微分して、 $x=0, 1$ において $y''(0)$, $y''(1)$ を求めると、次のようになる。簡単のために $y''(0) = y''_0$, $y''(1) = y''_1$ などと書くと、

$$y''_0 = 6(y_1 - y_0) - 4y'_0 - 2y'_1 + \frac{1}{12} y^{(4)}(\xi)$$

$$y''_1 = 6(y_0 - y_1) + 2y'_0 + 4y'_1 + \frac{1}{12} y^{(4)}(\xi)$$

上式のそれぞれに (2.1.1) 式を代入して整理すると、 y'_0 , y'_1 についての次のような連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} (4-p(x_0, y_0))y'_0 + 2y'_1 = 6(y_1 - y_0) - r(x_0, y_0) + q(x_0, y_0)y_0 + \frac{1}{12} y^{(4)}(\xi) \\ 2y'_0 + (4+p(x_1, y_1))y'_1 = r(x_1, y_1) - q(x_1, y_1)y_1 - 6(y_0 - y_1) - \frac{1}{12} y^{(4)}(\xi) \end{cases} \quad (2.1.5)$$

上式の剩余項を打切って、 y'_0 , y'_1 の近似解を求めると、次のようになる。いま、

$$A = 12 + 4\{p(x_1, y_1) - p(x_0, y_0)\} - p(x_0, y_0) \cdot p(x_1, y_1) \text{ とおくと,}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}'_0 = \frac{1}{A} \left\{ (6p(x_1, y_1) + 12)(y_1 - y_0) + (q(x_0, y_0)y_0 - r(x_0, y_0))(p(x_1, y_1) + 4) + 2(q(x_1, y_1)y_1 - r(x_1, y_1)) \right\} \\ \tilde{y}'_1 = \frac{1}{A} \left\{ (6p(x_0, y_0) - 12)(y_0 - y_1) + (q(x_1, y_1)y_1 - r(x_1, y_1))(p(x_0, y_0) - 4) - 2(q(x_0, y_0)y_0 - r(x_0, y_0)) \right\} \end{cases} \quad (2.1.6)$$

2.2 高位の修正子公式の作成

ここでは、Hermite 補間の理論を応用して参考文献 2) で作成使用した数式より高位の修正子公式を作成する。その前段として、ある区間で任意に与えられた C^{2k} 級関数 $y(x)$ に対する $(2k-1)$ 次の区分的 Hermite 補間多項式とその誤差について述べる。なお、この補間多項式は、次に示す補間条件の関係で奇数次しか存在しない。さて、2 点間 $[x_1, x_2]$ における $(2k-1)$ 次の区分的 Hermite 補間多項式 $p(x)$ は、次の条件を満たす関数として定義される。

$$p^{(j)}(x_i) = y^{(j)}(x_i) \quad (i=1,2 ; j=0,1,2,\dots,(k-1)) \quad (2.2.1)$$

この Hermite 補間多項式 $p(x)$ は、

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j (x - x_1)^j + (x - x_1)^k \sum_{j=0}^{k-1} a_{k+j} (x - x_2)^j \quad (2.2.2)$$

とおいて、補間条件 (2.2.1) により一意に決定される。この多項式 $p(x)$ の係数は、 $a_j (0 \leq j \leq k-1)$ については

$$p^{(j)}(x_1) = j! a_j = y^{(j)}(x_1) \text{ より } a_j = \frac{y^{(j)}(x_1)}{j!} \quad (0 \leq j \leq k-1) \quad (2.2.3)$$

a_{k+j} ($0 \leq j \leq k-1$) については、(2.2.2) 式を

$$p(x) = A(x) + (x - x_1)^k a_{k+j} (x - x_2)^j + B(x) \quad (2.2.4)$$

とおいて決定する。上式の $A(x)$, $B(x)$ は、それぞれ係数 $a_0, a_1, \dots, a_{k+j-1}$ と $a_{k+j+1}, \dots, a_{2k-1}$ をもつ多項式である。そこで、(2.2.4) において、 $p^{(j)}(x_2)$ を考え、Leibniz の定理と条件 (2.2.1) を使うと、残りの係数は

$$a_{k+j} = \frac{y^{(j)}(x_2) - A^{(j)}(x_2)}{j! h^j} \quad (0 \leq j \leq k-1, h = x_2 - x_1) \quad (2.2.5)$$

となる。次に、こうして得られる $(2k-1)$ 次の区分的 Hermite 補間多項式 $p(x)$ を用いて関数 $y(x)$ に対する数値積分公式を作成する。いま、 $p(x)$ を区間 $[x_1, x_2]$ で積分すると

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{a_{j-1}}{j} h^j + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^j j! a_{k+j}}{(k+1)(k+2)\cdots(k+1+j)} h^{k+j+1} \quad (2.2.6)$$

となる。この式と (2.2.5) から、 j が奇数のときは、数値積分公式における関数値 $y^{(j)}(x_2)$ の係数が負になることがわかる。ここで、 $a_0, a_1, \dots, a_{2k-1}$ は、(2.2.3) と (2.2.5) によって決定される係数である。そこで (2.2.6) を用いて関数 $y(x)$ の区間 $[a, b]$ における $(2k-1)$ 次の区分的 Hermite 補間多項式による数値積分公式を記述すると、次のようにかける。

$$\int_b^a y(x) dx = \sum_{i=1}^n I_i + E[y] \quad (2.2.7)$$

ここで、 $E[y]$ は積分公式の誤差である。次に $y \in C^{2k}[a, b]$ と仮定して、誤差 $E[y]$ を求めよう。いま、区間 $[a, b]$ の分割小区間 $[x_1, x_2]$ において、条件 (2.2.1) を満たす関数 $p(x)$ を用いて、次の関数 $E(x)$ を考える。 \bar{x} はこの小区間内で、任意に固定した点とする。

$$E(x) = [y(x) - p(x)] - [y(\bar{x}) - p(\bar{x})] \frac{w(x)}{w(\bar{x})}, \quad w(\bar{x}) \neq 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

$$\text{ここで, } w(x) = (x - x_1)^k (x - x_2)^k$$

$E(x)$ は、区間 $[x_1, x_2]$ において条件 (2.2.1) より重複度を含めて $(2k+1)$ 個の零点をもつので、

$$\begin{aligned} E^{(2k)}(\xi) &= y^{(2k)}(\xi) - [y(\bar{x}) - p(\bar{x})] \frac{(2k)!}{w(\bar{x})} = 0, \quad \exists \xi \in (x_1, x_2) \\ \therefore y(\bar{x}) - p(\bar{x}) &= \frac{y^{(2k)}(\xi(\bar{x}))}{(2k)!} (\bar{x} - x_1)^k (\bar{x} - x_2)^k, \quad \xi(\bar{x}) \text{ は, } \bar{x} \text{ に depend} \\ \therefore E_1(y) &= \int_{x_1}^{x_2} (y(x) - p(x)) dx = \frac{1}{(2k)!} \int_{x_1}^{x_2} y^{(2k)}(\xi(x)) (x - x_1)^k (x - x_2)^k dx \\ &= \frac{1}{(2k)!} y^{(2k)}(\eta) \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)^k (x - x_2)^k dx \\ &= \frac{(-1)^k f^{(2k)}(\eta)}{(2k+1) \{2k(2k-1)\cdots(k+1)\}^2} h^{2k+1}, \quad h = x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

従って、区間 $[a, b]$ を n 等分したときの区分的 Hermite 補間による $(2k-1)$ 次の積分公式の誤差 $E[f]$ は

$$E[y] = \int_b^a (y(x) - p(x)) dx = \sum_{i=1}^n E_i[y] = \frac{(-1)^k y^{(2k)}(\eta)}{(2k+1) \{2k(2k-1)\cdots(k+1)\}^2} h^{2k} \quad (2.2.9)$$

とかける。さて、上記の結果から本論の境界値問題の数値解法に使用する主要公式を作成する。

(2.2.6) において区間 $[x_1, x_2]$ を $[x_{i-1}, x_i]$, $k=4$ として 7 次の積分公式を求めるとき、次のようになる。

$$\begin{aligned} I_{i-1} = & \frac{h}{2} \left\{ (y_{i-1} + y_i) + \frac{9h}{42} (y'_{i-1} - y'_i) + \frac{h^2}{42} (y''_{i-1} + y''_i) + \frac{h^3}{840} (y^{(3)}_{i-1} - y^{(3)}_i) \right\} \\ & + \frac{y^{(8)}(\zeta)}{25401600} h^9 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

この公式の係数は、(2.2.3) と (2.2.5) 式により求めるが、計算はかなり複雑になる。この 7 次の数値積分公式から、容易に次のような高位の微分差分公式がえられる。なお、ここでは、 $y(x)$ は C^9 級関数とする。

$$\begin{aligned} y_i = & y_{i-1} + \frac{h}{2} (y'_{i-1} + y'_i) + \frac{9h^2}{84} (y''_{i-1} - y''_i) + \frac{h^3}{84} (y^{(3)}_{i-1} + y^{(3)}_i) + \frac{h^4}{1680} (y^{(4)}_{i-1} - y^{(4)}_i) \\ & + \frac{y^{(9)}(\zeta)}{25401600} h^9 \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

2.3 数値計算に使うその他の主な式

以下の式は、予測子・修正子の要素に用いる。与微分方程式の y'' を微分していくと $y^{(3)}(x)$, $y^{(4)}(x)$, $y^{(5)}(x)$, $y^{(6)}(x)$, $y^{(7)}(x)$ は次のように表される。以後表現を簡単にするため、例えば $y^{(k)}(x)=y^{(k)}$, $P_{xy}(x,y)=P_{xy}$, $y^{(k)}(x_1)=y_1^{(k)}$ 等と略記する。

$$\begin{aligned} y^{(3)}(x) = & r_x - q_xy + (r_y - p_x - q_xy - q)y' - p_y(y')^2 - py'' \\ y^{(4)}(x) = & r_{xx} - q_{xx}y + (2r_{xy} - p_{xx} - 2q_{xy}y - 2q_x)y' + (r_{yy} - 2p_{xy} - q_{yy}y - 2q_y)(y')^2 \\ & + (r_y - 3p_{yy}y' - 2p_x - q_xy - q)y'' - p_{yy}(y')^3 - py^{(3)} \\ y^{(5)}(x) = & r_{xxx} - q_{xxx}y + 3(r_{xxy} - q_{xxy}y - q_{xx})y' - p_{xxx}y' + 3(r_{xyy} - p_{xyy} - q_{xyy}y)(y')^2 \\ & - 6q_{xy}(y')^2 + 3(r_{xy} - P_{xx} - q_{xy}y - q_x)y'' + (r_{yyy} - q_{yyy}y)(y')^3 \\ & - 3(p_{xyy} + q_{yy})(y')^3 - p_{yyy}(y')^4 - py^{(4)} + \{3(r_{yy} - q_{yy}y) - 9p_{xy} - 6q_y\}y'y'' \\ & - 6p_{yy}(y')^2y'' - 3p_y(y'')^2 + (r_y - 4p_{yy}y' - 3p_x - q_xy - q)y^{(3)} \\ y^{(6)}(x) = & r_{xxxx} - q_{xxxx}y + \{4(r_{xxy} - q_{xxy}y - q_{xx}) - p_{xxxx}\}y' \\ & + \{6(r_{xxyy} - q_{xxyy}y - 2q_{xy}) - 4p_{xxy}\}(y')^2 + \{6(r_{xyy} - q_{xyy}y - q_{xx}) - 4p_{xyy}\}y'' \\ & + \{4(r_{xyyy} - q_{xyyy}y) - 6(p_{xyy} + 2q_{xyy})\}(y')^3 \\ & + 6(2r_{xyy} - 3p_{xyy} - 2q_{xyy}y - 4q_{xy})y'y'' + \{4(r_{yy} - q_{yy}y - q_x) - 6p_{xy}\}y^{(3)} \\ & + (r_{yyyy} - q_{yyyy}y - 4q_{yy} - 4p_{yyyy})(y')^4 + 6(r_{yy} - q_{yy}y - 4p_{yy} - 3q_{yy})(y')^2y'' \\ & - p_{yyyy}(y')^5 + 3(r_{yy} - q_{yy}y - 4p_{yy} - 2q_y)(y'')^2 \\ & + 4(r_{yy} - q_{yy}y - 4p_{yy} - 2q_y)y'y^{(3)} - 10p_{yyyy}(y')^3y'' - 15p_{yy}y'(y'')^2 \\ & - 10p_{yy}y''y^{(3)} - py^{(5)} - 10p_{yy}(y')^2y^{(3)} - 5p_yy'y^{(4)} + (r_y - 4p_x - q_xy - q)y^{(4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^{(7)}(x) = & r_{xxxx} - q_{xxxx}y + \{5(r_{xxxx}-q_{xxxx}y-q_{xxxx})-p_{xxxx}\}y' \\
& + \{10(r_{xxxx}-q_{xxxx}y-2q_{xxx})-5p_{xxxx}\}(y')^2 \\
& + \{10(r_{xxx}-q_{xxx}y-q_{xx})-5p_{xxx}\}y'' \\
& + 10(r_{xxxy}-q_{xxxy}y-p_{xxxy}-3q_{xxxy})(y')^3 \\
& + 30(r_{xxxy}-q_{xxxy}y-2q_{xy}-p_{xxxy})y'y'' + 10(r_{xy}-q_{xy}y-q_x-p_{xx})y^{(3)} \\
& + 5\{r_{xyyy}-q_{xyyy}y-2(p_{xyyy}+2q_{xyyy})\}(y')^4 \\
& + 30(r_{xyyy}-q_{xyyy}y-2p_{xyyy}-3q_{xyy})(y')^2y'' \\
& + 20(r_{xyy}-q_{xyy}y-2q_{xy}-2p_{xyy})y'y^{(3)} + 5(r_{xy}-q_{xy}y-q_x-2p_{xx})y^{(4)} \\
& + (r_{yyyy}-5p_{yyyy}-5q_{yyyy}-q_{yyyyy}y)(y')^5 \\
& + 10(r_{yyyy}-q_{yyyy}y-4q_{yyy}-5p_{yyy})(y')^3y'' \\
& + 15(r_{xyy}-q_{xyy}y-2p_{xyy}-2q_{xy})(y'')^2 + 15(r_{yy}-q_{yy}y-5p_{yy}-3q_{yy})y'(y'')^2 \\
& + 10(r_{yy}-q_{yy}y-3q_{yy}-5p_{yy})(y')^2y^{(3)} \\
& + 10(r_{yy}-q_{yy}y-5p_{yy}-2q_y)y''y^{(3)} - p_{yyyyy}(y')^6 \\
& + 5(r_{yy}-q_{yy}y-5p_{yy}-2q_y)y'y^{(4)} - 6p_{yy}y'y^{(5)} - 15p_{yyyy}(y')^4y'' \\
& - py^{(6)} - 45p_{yyy}(y'y'')^2 - 20p_{yyy}(y')^3y^{(3)} - 15p_{yy}(y'')^3 - 60p_{yy}y'y''y^{(3)} \\
& - 10p_y(y^{(3)})^2 - 15p_yy''y^{(4)} - 15p_{yy}(y')^2y^{(4)} + (r_y-5p_x-q_yy-q_y)y^{(5)}
\end{aligned}$$

3. 解計算のアルゴリズム

ここでは、本論の境界値問題に対する数値解計算の段階的手順の概要を述べる。

[1] 先ず、データとして、本問題

$$y'' + p(x,y)y' + q(x,y)y = r(x,y), \quad y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad p, q, r \in C^5$$

の係数関数と、それらの5次までの偏導関数を計算し、入力する。偏導関数の総数は60個になる。また、境界条件と分点数Nを与える。きざみ幅は $h=1/N$ とし、分点数は、 $N=2^k$ ($k=2,3,4,5,6$) と変化させる。

[2] 2節(2.1.6)の第1式を使って、境界初期点における微係数の近似値 \tilde{y}_0 を求める。

[3] 射的数値解法に必要な収束条件: $\epsilon_j = (0.1)^{16-j}$ ($j=1 \sim 11$) を与える。実際の計算に当っては、分点数Nに対して、厳しい収束条件 $j=1$ から順次に条件をゆるくして収束したときに出力する。次に近似値 \tilde{y}_0 の補正値: $\delta_k = (0.1)^k$ ($k=1 \sim 15$) を分点数Nと各収束条件 $\epsilon_j = (0.1)^{16-j}$ ($j=1 \sim 11$) に対して $k=1 \sim 15$ の順で与える。

[4] $y(0)=A$ と \tilde{y}_0 (\tilde{y}_1 とおく) を出発値として、問題の方程式と2.3で求めた高次偏導関数式を使って、分点 x_i における $y^{(k)}(x_i)$ ($k=0,1,\dots,7$) の値を計算する。その場合、予測子として次の2式の主要項及びそれらを適当に組み合わせた式を使用する。

$$y_{i+1} = \sum_{k=0}^7 \frac{y_i^{(k)}}{k!} h^k + E_1, \quad \text{誤差 } E_1 = \frac{h^8}{40320} h^{(8)}(\xi)$$

$$y'_{i+1} = \sum_{k=1}^7 \frac{y_i^{(k)}}{(k-1)!} h^{k-1} + E_2, \quad \text{誤差 } E_2 = \frac{h^7}{5040} h^{(8)}(\eta)$$

[5] 手順[4]で求めた $y^{(k)}(x_i)$ ($k=0,1,\dots,7$) の値をもとにしてさらに、打切誤差が h^9 のorderの精度を

もつ (2.2.11) 式の主要項を修正子として使い、近似値の精度を高めていく。即ち、次の数式：

$$\begin{aligned} y_i^{(k)} \approx & y_{i-1}^{(k)} + \frac{h}{2} (y_{i-1}^{(k+1)} + y_i^{(k+1)}) + \frac{9h^2}{84} (y_{i-1}^{(k+2)} - y_i^{(k+2)}) + \frac{h^3}{84} (y_{i-1}^{(k+3)} + y_i^{(k+3)}) \\ & + \frac{h^4}{1680} (y_{i-1}^{(k+4)} - y_i^{(k+4)}) \quad (k=0, 1, 2, 3) \end{aligned}$$

により、分点 x_i における値を $y_i^{(3)}$, $y_i^{(2)}$, y_i' , y_i の順に計算し、数値解を求めていく。

[6] 分点数 N に伴うきざみ幅 h の各々に対して、収束条件 $\epsilon_j = (0.1)^{16-j}$ ($j=1 \sim 11$) を動かし、さらに ϵ_j の各々に対して $\delta_k = (0.1)^k$ ($k=1 \sim 15$) を変化させて境界終点における近似解と境界終点条件との差の絶対値が ϵ_j を以下になれば、分点 x_i における数値解 y_i を出力する。そうでなければ、 $\tilde{y}_{n+1} > B$ のときは、 $\tilde{y}_i - \delta_k$ を \tilde{y}_i とおき、 $\tilde{y}_{n+1} < B$ のときは、 $\tilde{y}_i + \delta_k$ を \tilde{y}_i と置き換えて手順 [4] \Rightarrow [5] \Rightarrow [6] と反復計算して解の精度を高めていく。収束計算については δ_k の補正値の位を 1 つずつ小さくしていく、 $k=15$ になっても収束しないときは、収束条件の指數 order を 1 つずつゆるくして反復を続ける。この手順による数値実験の結果については、次節で述べる。

4. 数 値 実 験 例

本論の数値解法を検証するため、真の解がわかる種々の問題について数値実験を行った。ここでは、その中の 3 例について表示する。計算機は FMR-80HEI システムを利用し、FORTRAN77 による倍精度で計算した。なお、倍精度による計算可能な有効桁数は、10桁換算にして約16桁である。

【例 1】 $y'' - yy' - y^2 = \frac{2-x^2}{(x-2)^2}$, $y(0)=0$, $y(1)=1$

表 1 数値解の誤差

相対誤差 刻み幅 h(1/n)	分点における		収束条件 : ϵ $ \tilde{y}_{n+1} - y(1) < \epsilon$
	最大誤差	誤差の平均	
1/4	$0.415 \cdot 10^{-7}$	$0.678 \cdot 10^{-7}$	10^{-5}
1/8	$0.328 \cdot 10^{-9}$	$0.176 \cdot 10^{-9}$	10^{-7}
1/16	$0.192 \cdot 10^{-11}$	$0.564 \cdot 10^{-12}$	10^{-9}
1/32	$0.908 \cdot 10^{-14}$	$0.175 \cdot 10^{-14}$	10^{-11}
1/64	$0.529 \cdot 10^{-15}$	$0.342 \cdot 10^{-15}$	10^{-13}

この問題の真の解は、 $y=x/(2-x)$ である。この場合、分点数 N に対する \tilde{y}_i の補正量 δ はすべて 10^{-4} のときに表 1 の収束条件 ϵ の値で収束した。また、 \tilde{y}_i の補正回数は 7 ~ 8 回程度が最適で、それより多く反復すると計算誤差累積の為か精度が少しづつ落ちていく。従って、境界初期点における近似微係数： $\tilde{y}_i \pm \delta_k \Rightarrow \tilde{y}_i$ の補正回数が本解法による数値解計算上の重要なポイントになる。

【例 2】 $(x+1)y'' - y' = 2(x+1)e^{2y}$, $y(0)=0$, $y(1)=-\log 2$

表 2 数値解の誤差

相対誤差 刻み幅 h(1/n)	分点における		収束条件 : ϵ $ \tilde{y}_{n+1} - y(1) < \epsilon$
	最大誤差	誤差の平均	
1/4	$0.566 \cdot 10^{-6}$	$0.515 \cdot 10^{-6}$	10^{-6}
1/8	$0.741 \cdot 10^{-8}$	$0.559 \cdot 10^{-8}$	10^{-8}
1/16	$0.892 \cdot 10^{-10}$	$0.620 \cdot 10^{-10}$	10^{-10}
1/32	$0.746 \cdot 10^{-11}$	$0.558 \cdot 10^{-11}$	10^{-12}
1/64	$0.276 \cdot 10^{-13}$	$0.176 \cdot 10^{-13}$	10^{-13}

この問題の真の解は、 $y = -\log(1+x)$ である。この場合の \tilde{y}_1 の補正反復回数は 8 ~ 9 回程度が最適で、6 回より少なくすると収束計算不足で精度は少しずつ落ちていき、4 回以下にすると収束しなくなる。

【例 3】 $y'' - y' + y^2 = (2\sin x - 1)y, y(0) = 1, y(1) = \sin 1 + \cos 1$

表 3 数値解の誤差

相対誤差 刻み幅 $h(1/n)$	分点における		収束条件 : ϵ $ \tilde{y}_{n+1} - y(1) < \epsilon$
	最大誤差	誤差の平均	
1/4	$0.699 \cdot 10^{-9}$	$0.388 \cdot 10^{-9}$	10^{-13}
1/8	$0.115 \cdot 10^{-10}$	$0.718 \cdot 10^{-11}$	10^{-14}
1/16	$0.193 \cdot 10^{-12}$	$0.120 \cdot 10^{-12}$	10^{-15}
1/32	$0.698 \cdot 10^{-15}$	$0.380 \cdot 10^{-15}$	10^{-14}
1/64	$0.451 \cdot 10^{-15}$	$0.233 \cdot 10^{-15}$	10^{-15}

この問題の真の解は、 $y = \sin x + \cos x$ である。非常に良い精度の解が求まる。この場合の \tilde{y}_1 の補正反復回数は、9 回程度が最適である。上式の境界条件が単位区間ではなく、 $y(0) = 1, y(\pi/2) = 1$ の場合は、与式を $x = (\pi/2)t$ と変換して、

$$y'' - \frac{\pi}{2}yy' + \frac{\pi^2}{4}y^2 = \frac{\pi^2}{4}(2\sin \frac{\pi}{2}t - 1)y, y(0) = 1, y(1) = 1$$

を解くことになる。変換後の解を求めるとき、例 1, 2 と同精度の数値解が得られる。

5. 結 言

本論では、標記の境界値問題を Hermite 近似を応用して、高精度の数値解を求める計算法とその数値例について述べた。本解法の特徴は、Hermite 近似の性質を用いて、境界初期点の 1 次微係数の近似値を求め、射的解法に活用したこと、および参考文献2)で、作成使用した修正子公式を h^9 の order まで上げて数値解の精度改良を達成したことである。本解法の場合、境界初期点における \tilde{y}_1 の補正反復回数は、7 ~ 9 回のときが解の精度が最も良くなることが数値例からわかる。数値計算に当っては、解法の理論的手順を組み立てた後、テスト計算においてプログラム上の工夫と改良に相当の時間を要した。実際の微分方程式に対する数値解の、信頼できる桁数については、先ず、収束条件を目安にして、分点数の増加に伴う同一分点における数値解の重複部分を読み取るようにしたらよいと考える。なお、本論の考えは他の形の境界値問題にも拡張できるので、より広い微分方程式にも応用できるものと考える。

参 考 文 献

- 1) 杠 顯一郎：ある種の非線形常微分方程式の初期値問題に対する高位の微分差分法による数値解法、久留米高専紀要第15巻第2号、2000.3, p17-21
- 2) 杠 顯一郎：ある種の2階非線形境界値問題に対する shooting method に対する Hermite 近似の応用、久留米高専紀要第8巻第2号、1993.3, p49-56
- 3) 杠 顯一郎：区分的 Hermite 補間とその数値積分への応用、久留米高専研究報告第35号、1981.3, p19-25
- 4) 杠 顯一郎：An Application of Hermite Interpolation to Numerical Integration and Differential Equations (1). 日本数学教育学会、高専部会研究論文誌第3号
- 5) P.M. Prenter: Splines and Variational Methods, A Wiley-Interscience Publication. 1975, p49-69

一般論文

加賀一向一揆における「郡」の役割

松 尾

—*

On Gun (郡) of Kaga (加賀) in the Sengoku (戦国) Period

Hajime MATSUO

一揆への蓮如積極的関与が前提

1997年『講座蓮如』(第1巻 平凡社)に収録された木越祐馨「文明・長享期加賀における「郡」について」は、加賀一向一揆研究において論議されてきた「郡」の役割と性格付けにひとつの結論を導き出す論考であった。1989年に設楽薰氏により史料紹介された『斎藤親基日記紙背文書』中の関連史料2点の分析によるものである¹⁾。

結論は、木越氏の論議の骨子は、本願寺門徒の一揆と考える神田千里説を指示するものであり、その論証過程において、今までの研究史にない知見を含んだ十分に納得のいくものであると思われた²⁾。木越氏の論議における最大の利点は、「郡」研究史上において、必ず論点となった『十輪院内府記』文明9年2月29日条に所引する3点からなる史料の整合的解釈を可能にしたところにある。さらに『斎藤親基日記紙背文書』2点の紹介であり、「郡」関係者と本願寺との関係を強く示唆する記述の存在により、「郡」と本願寺との関係が強固であることが証明された。

『十輪院内府記』文明9年2月29日条、『斎藤親基日記紙背文書』の解釈とについては、すでに、自説の指示を受けた神田千里氏が、1998年「加賀一向一揆と一向宗」(『一向一揆と戦国社会』吉川弘文館)において自説をさらに補強して述べられているところであるから、ここでは詳述しない。

ここでの問題関心は、1992年に金龍 静氏により紹介された「越前淨得寺御文集」(『蓮師教学研究』No.2)に紹介された、「柳本御文集」第5通に書写された蓮如『御文』の異本・類本と目される1点にある。

「柳本御文集」第5通は、史料紹介を行った佐々木求巳氏によると³⁾、戦前に柳 宗悦氏が金沢市内

の古書店で購入したというが、現在は所在不明であると聞く。「柳本御文集」第5通の内容は、すでに旧稿で検討したので詳細は繰り返さないが、その史料的価値は、本願寺蓮如と1474(文明6)年加賀一向一揆への蓮如の積極的関与を示すと判断せざるをえない内容を持つものであった⁴⁾。

ところが、この「柳本御文集」第5通は、写本である上に他の「御文集」にも異本・類本が見当たらぬ孤立した存在で、一部の研究者からは「偽文書」ではないかとの表明もあった⁵⁾。しかしながら、金龍 静氏による戦国初期の「御文集」と目さる「越前淨得寺御文集」の発見・紹介により、一向一揆への蓮如の積極的関与は否定できないところなったと考えられる。

谷下一夢『真宗史の諸研究』の再評価

1941年に上梓された谷下一夢『真宗史の諸研究』には、「中世に於ける本願寺と専修寺の不和に就いて」をはじめとして、一向一揆の形成と展開を、両派の軋轢から検討するという視点を重視された⁶⁾。谷下氏の本願寺蓮如と専修寺真慧の不和に一揆形成を求める論議は、戦後の一向一揆論に受け入れられたわけではない。戦後、一向一揆論は⁷⁾、土一揆・国一揆論の展開に呼応して、一揆形成を領主と農民の階級的対立と、一揆イデオロギーへの真宗の役割を重視しながら研究をすすめてきた。ところが、戦後、一向一揆論が、あまりに中世一揆史研究に歩調を合わせ、谷下氏が注意を喚起した本願寺蓮如と専修寺真慧の不和という事実が正面から取り上げられることはなかった。

確かに、両派の不和・軋轢は、一向一揆の形成が背景であり、例えば、1465(寛正6)年に真慧が認めた「専修寺越前国末寺門徒中申状⁸⁾」を検討すれば、この事態は容易に把握できる。専修寺は、堅田大貴・金森一揆に際し⁹⁾、本願寺門徒が武装蜂起し、

比叡山の大衆と対決を強めたなかで、自らを「法然上人の末流」において「三経一論五部九巻」を学び、「一向専修称名念佛」を退転なきにいたつていると述べる。そして、この度の山門大衆による「無碍光衆一類」への「退治」について、「専修念佛門徒中」(高田門徒)は喜悦しており、「憲法議を以て、下向の上使ならびに守護方の停止が「成敗」される旨について、かたじけない処置と恐れ入っていると「言上」している。高田門徒側からの「申状」の言上に対し、山門側は西塔・東塔の「衆議」による安堵をえたが¹⁰⁾、さっそく高田門末に「案文」を作成し回覧している。

少なくとも、高田門徒側が、本願寺門徒の山門との確執から、在地での一揆形成への警戒する立場が読み取れる。しかも、この時期の高田門徒側が抱える実情からすれば、近江坂本に妙林院を建立し、真慧の指導のもとに琵琶湖周辺への教線の展開を実行していた時期である。事実、1460年代(寛正年間)に作成されたと推定される「坂本妙林院番帳¹¹⁾」により、諸国門徒の勤番体制が形成されており、この時期の専修寺真慧と高田門徒にとって、近江での本願寺門徒の一揆形成と山門との対立が、近江地域における教線の展開を左右する事態に陥ったことが予測される。

このような事実を踏まえると、成立期一向一揆研究において、本願寺と専修寺の軋轢問題を決して等閑にしてはならないことが判明してくる。

専修寺真慧の動向 一本願寺蓮如との関係において

1984年に発表された平松令三「高田専修寺真慧と本願寺蓮如」(北西 弘先生還暦記念『中世仏教と真宗』吉川弘文館¹²⁾)は、真慧と蓮如との交流・対立を検討された。平松氏によれば、1472(文明4)年2月に完成した真慧の主著『顕正流儀鈔¹³⁾』の述作も意図も、蓮如=本願寺門徒からの論難に回答しようとしたものと考えられている¹⁴⁾。特に、1471(文明3)年夏より、越前国河口荘坪江郷吉崎に留録し、北陸への活動を本格化した蓮如の行動に反応したものと思われる¹⁵⁾。

『顕正流儀鈔』に関する堤玄立・稻垣舜岳氏らの論考による通り、真慧の反論は主に3点にわたるが、明らかに蓮如の主張に対する反論である。両氏の論考を手がかりとして、私なりに真慧の主張を整理してみると¹⁶⁾、

- (1) 真宗において、信心第一は当然であるが、称名の役割(称名行の重視)を軽視してはならない。(蓮如の「信心正因・称名報恩」義への反論)大切なのは、称名は常に信のすすめであり、「信行不離、機法一体はこの宗の己証」とする。
- (2) 『無量寿經』の第18願は、阿弥陀仏の本願ではあることは間違いないが、だからといって、第19願を「諸行往生の願」と理解し軽視するのは誤りである。すなわち、三願(18・19・20願)はそれぞれ、念佛往生・諸行往生・結縁往生であり、往生のすがたである三願を三經(無量寿經・觀無量寿經・阿弥陀經)に配当し、三往生聚(難思議往生・双樹林下往生・難思議往生)に当て、三定聚(正定聚・邪定聚・不定聚)は宗旨の肝要である。
- (3) 真宗の本尊義は、「絵像・木像は方便なり、これをたのみて益なし」とい、蓮如と同様に、真慧も本尊は絵象より名号が望ましいと考えていたことがわかる。真慧の主張は、だからといって、異形の本尊を破棄したり、焼却したりすることが許されるべきではない。

ということになる。

このように、専修寺真慧は、本願寺蓮如の北陸での積極的な情宣活動を前にして、手をこまねいていたわけではなく、『顕正流儀鈔』を著して蓮如側からの論難に応じようとしたわけである。ここで興味深いのは、両派の教義的対立に相俟って、双方に一揆形成の動きが存在したということである。論争の過程は、実のところ戦闘への経路でもあったわけである。

高田門徒と文明6年一揆

1475(文明6)年一向一揆に高田門徒が、富樫幸千代方として戦闘行動に参加したことは『白山宮莊嚴講中記録』文明6年条にみえる。『白山宮莊嚴講中記録』にみえる文明6年一揆のあらましから検討してみよう。ただ、高田門徒の一揆行動は、文明6・7年一揆、長享一揆の結果、加賀において高田門徒勢力が退転し、『官知論』のような本願寺系の視点にたった史書をのこすことができず詳細は不明である。

『白山宮莊嚴講中記録』によると¹⁷⁾、7月26日に、

念仏衆の高田・本願寺国民らが戦闘を開始した旨を伝える。この時期の戦闘規模は本格的対立ではなく、8月26日の「書状」で、当事者の一人である蓮如も「近日落居」と樂観的で、本格的戦闘への見込はもつていなかつたようである¹⁸⁾。

ところが、高田・本願寺門徒の小競り合い程度の規模で開始された文明6年一揆であったが、秋になり様相が一国規模の戦闘に拡大する。規模が拡大する一揆の中での高田門徒の動向は不明とせざるをえないが、「高田之土民同心」とあるように富樫幸千代方として行動していたことは事実である。したがって、本願寺門徒との抗争が武装蜂起の契機となり、以後は幸千代方勢力としてその一翼を担つたものと考えられる。

当初は、高田・本願寺の小競り合いであった文明6年一揆も、10月に入ると戦闘状況は急展開する。越前国境付近から山内荘に逼塞していた政親勢が加賀中央へ打ち出し、幸千代の本拠地蓮台寺城を包囲した。そして、14日に蓮台寺城が落城し幸千代は自害、幸千代方の一部が白山宮周辺に逃亡、16日に白山へ政親方が出向し、白山方は「御方」となり、24日には幸千代方の武将が自害し、富樫政親と連合する本願寺門徒の勝利と確定した。『白山宮莊巖講中記録』には10月中の高田門徒の動向は記していないが、同年12月19日の蓮如「書状」に¹⁹⁾、本光寺へ宛てて高田門徒の「一人にても此の方へは出入り停止すべき候」とし、以前として対立関係が継続していたことがわかる。

しかも、近江坂本の妙林院に対する番勤仕体制には（「坂本妙林院番帳」）には、月番に加賀門徒が入つており、加賀の高田門徒が数量的・経済的にもそれなりのものがあったのである。したがって、本願寺と同様に専修寺=高田門徒における「番衆」体制形成の問題を今後の研究史は意識しなければならないことになる。

「越前淨得寺御文集」と文明6年一揆

金龍 静氏が紹介した「越前淨得寺御文集」中には、蓮如が文明6年一揆について述べた1通が存在し、「柳本」第5通の異本・類本と考えられる²⁰⁾。現在、「柳本」自体の所在が確認されていないし、「淨得寺本」の書写・筆跡が戦国期のものと判断されることから最善本と判断できる。

「淨得寺本」の伝える文明6年一揆のきっかけは、「高田門徒において年を積み日を重ねて、法敵を作すといえども、且つ以て不承引候ところに、此の

方門徒ある在所において、あるいは殺害、あるいは放火等の種々の悪行」をはたらいたと糾弾する。続けて蓮如は、在地における軋轢ばかりだけではなく、高田側が「数多の一献を以て、守護方・國方と相語り、既に彼等と同心せしめおはりぬ、然りといえども、この度加州一國之土一揆となる」とし、文明6年一揆が高田側・富樫幸千代側が本願寺側へ仕掛けて来たものととしている。

そして蓮如は、本願寺門徒の本分は「土民百姓の身なれば、限りある年貢・所当を均等に沙汰」しているところ、「一端は憐愍こそなくとも結句罪咎にしつめ、剩さえ誅罰に行うべきその結構あるの間、力無く比の如く謀叛を山内方と同心令してこの企てのところ」なったとするのである。つまり、高田・幸千代側からの圧迫に対応しながら、本願寺門徒は武装=一揆化したというのである。

もっとも蓮如の主張が、文明6年一揆の責任を高田・幸千代側に転嫁しようとする意図も大であるし、前年には吉崎坊舎に結集する多屋坊主衆が衆議し教団あげての武装化が進行してわけであるから、一揆行動の正当化の論理として聞かなければならない²¹⁾。

一揆行動の正当化の論理として「淨得寺本」・「柳本」で興味をひくのは「しかる間上意として、忝くもかくのごときの旨、聞し召しおかるるによりて、既に百姓中へ御奉書なさるる間、身に於いて今は私ならぬ次第なり」としている点である²²⁾。

そして、富樫政親を支援する本願寺一揆勢力の指導者は、『白山宮莊巖講中記録』には、具体的に本願寺門徒を示す記事はないが、翌1476（文明7）年一揆の内容を伝える『天正三年記²³⁾』には、「州崎藤右衛門入道慶覚・湯湧次郎右衛門入道行法」の名前が見え、両名は、のちの「郡」関係史料から判明する通り「郡」一揆の主要メンバーであることがわかる²⁴⁾。

蓮如の言い分では、文明6年一揆は、在地での高田・本願寺両派の小競り合いを緒戦として、高田側が富樫幸千代方へ参戦することにより、加州一國之土一揆となったというのである。しかし、本願寺側の応戦が高田側の動きに応ずるといった消極的なものではなく、戦闘を繰り返しながら「郡」一揆を立ち上げていこうとする動きとみてよいであろう。

文明6・7年一揆と「郡」の成立

在地における高田門徒との小競り合いが一揆形成の発端であるとすると、この時期の蓮如の言動に注意をしなければならない点がある。従来の一一向一揆

研究においては、これも1935年に発表された谷下一夢「加賀の一一向一揆と蓮如の王法為本」(『真宗史の諸研究』収録)を代表として、以来、一貫して「御文」にみられる「王法為本」を、一向一揆抑制策としてみてきた。

ところが、近年の研究史は「王法為本」説を、必ずしも一揆抑止策とは考えずに、蓮如が発言した状況における「王法」文言分析を提言している。事実、「淨得寺本」・「柳本」が述べるところは、文明6年一揆は「王法為本」の一一向一揆であった²⁵⁾。

ゆえに、文明6・7年期において、蓮如の言説の中心である「御文」を見る場合、教義的な言説であっても、一揆という社会の現実問題と無縁とはすることはできなくなる。むしろ、一向一揆との関係において、積極的な一揆主導策として読んだ場合どのようなことになるのであろうか。例えば、先にも述べたように専修寺真慧は『顕正流儀鈔』を著し本願寺蓮如の念佛説に反論を加えたわけであるが、この真慧の主張に対し、蓮如の対応が予測されるが、この時期に双方が論戦することはそれ対立し、一揆組織を形成した状況を促進することになったことが予測される。「御文」の中から2,3の例をあげながら考えていく。

文明4年11月27日の年紀を持つ「御文」において、「平生業成」について詳説する。本稿での興味からこの「御文」に注意すると、「平生業成」を述べたあと「一向に弥陀をたのみまひらせて、ふた心なく一念に我が往生は如来のかたより御たすけありけり」と信じたてまつりて、その後の念佛は、仏恩報謝の称名なり、と心得候へきなり」と「信心正因・称名報恩」の意義を説く。また、文明5年8月12日「御文」は、「信心正因・称名報恩」義を強調している²⁶⁾。

「御文」での蓮如の主張は、真慧の称名は常に信のすすめであり、「信行不離、機法一体はこの宗の己証」という狭義と反するものではないが、称名の目的は「報恩」であると断定することにより両者の相違が際立つものと考えられる。

次に、この時期に蓮如が拘った問題に「宗名」がある。文明5年9月下旬の年紀を持つ「御文」群である。本願寺門徒=親鸞の一流の宗名は「淨土真宗」であることを強調し、「一向宗」という時宗をはじめとする類似の浄土教諸派との混同をもたらす名称の使用禁止し、以後において正規の名称「淨土真宗」を名のついくことを本願寺門徒に求めている²⁷⁾。

この時期において、本願寺門徒こそが親鸞の一流

であり「淨土真宗」となることが望ましいと強調することは、北陸における浄土教異流時宗との混同を避けるということとともに、高田門徒への本願寺門徒としての「自立」意識と、親鸞末裔として本家意識を剥き出しにした「上臘振舞」を行い、一揆形成期における自派の結束意識高揚を謀ったものと考えるのが妥当であろう。もっとも、蓮如の宗教的主張の当否は棚上げし、真宗学的分析に委ねなければならない課題となる。

以上の「御文」の述作が、蓮如が高田門徒と本願寺門徒との峻別を目的であるとすれば、一揆の形成はそのまま宗派意識の高揚と組織化であると考えられる。つまり、文明6年一揆の形成は、本願寺門徒と高田門徒双方の「宗派=門徒の浄化」をもたらす事態が進行したものと考えられる。

仏法の敵の主張と惣荘村落での一揆形成

神田・木越氏が検討した通り、「郡」は文明6年一向一揆を契機に形成したものと考えられるが、本願寺門徒と高田門徒双方の「宗派=門徒の浄化」であるとともに、惣荘村落においては、政親方(東軍)と幸千代方(西軍)の主導権争いが起こったわけである。当該の村落がどちらかの派に組するかを決定する小競合である。

「中院文書」が伝えるところによると²⁸⁾、1481(文明11)年2月那谷寺本泉坊周応に、額田荘得丸の知行について、渡辺四郎方(一族)との係争について、本所中院に「言上上」を作成し訴える²⁹⁾。その内容は、渡辺四郎は、文明6年一揆に加わり、土合城に築城した事情は得丸の知行を望んだのである、この渡辺の主張に対して、周応方についた惣荘方は、当国の一乱は仏法に敵をなしで廉直を失し弓箭をなしたわけであると反論した。惣荘側の主張は、仏法の敵への弓箭であるので渡辺方からの反訴ではなく、ゆえに額田惣荘方は「当国の一乱」方=一向一揆側であろうから、惣荘は本願寺門徒化したものと考えられてきた³⁰⁾。

「中院文書」にみえる額田惣荘の門徒化という事態を、神田千里氏は「一向宗徒」化という観点から捉えなおそうとされた。神田氏によると、額田惣荘が渡辺方の主張を退ける論理として、法敵打倒の戦いであるという論法により主張され、文明6年の戦いが法敵打倒の聖戦であったという認識が加賀の在地社会で一定通用したものであったとする³¹⁾。また、額田惣荘の主張は、文明6年一揆を仏法に敵をなした高田門徒と富樫幸千代への「ムホン」であるとい

う蓮如の主張（「柳本」＝「淨得寺本」）とも共通しているとされている。

額田惣荘・蓮如の主張は、法敵打倒の戦いをスローガンとする一揆運動体が各地で形成されていく事態を論理化し、本願寺方においての惣荘村落での一揆組織形成が行われる状況を示したものと読むことができる。したがって、惣荘村落において一揆組織が成立することは、本願寺・高田方いずれかに属する一揆組織による村落支配が実現することを意味することになる。

「郡」の機能

概ね、加賀における「郡」の成立は、文明6年一揆にあたり、在地での小競合いが発端となり、一国レベルでの合戦となった際に、高田門徒＝富樫幸千代方と抗争する本願寺門徒＝富樫政親方の運動体として形成したと考えるのが妥当であることとなる。そして、重要な点は、「郡」の形成にあたって加賀の惣荘村落は、宗教的には高田・本願寺両門徒団への組み入れ（＝門徒の浄化）、政治的には幸千代（守護）方・政親（謀叛＝一揆）方への肩入れ、という両派への分裂を産んだのである。

さて、成立期の「郡」の活動については、谷下一夢氏の研究以来、多くの研究者によって論議されてきたわけであり、私見も再三にわたり論じてきた³²⁾。ここでは、神田・木越の論議が妥当であるという立場において、論じ尽くされていないと考える問題に考察を絞り込みたい。

石田晴男氏を代表とする「郡」を一向宗、本願寺門徒との関係において理解せず、いわば「惣国一揆」論として解消しようとする論議に対する位置関係化の明確化の作業である³³⁾。これは、石田氏が行った論議のうち『十輪院内府記』と、江沼郡中宛「蓮如書状」の再解釈の問題であり、このうち『十輪院内府記』文明9年2月29日条の解釈の問題について³⁴⁾、『斎藤親基日記』紙背文書を利用した神田・木越氏論議により決着がついたと考えられるが、江沼郡中宛「蓮如書状」の解釈についての論議は、いまだ不十分であるように思われる³⁴⁾。

江沼郡中宛「蓮如書状」に関する石田氏の論点の中心は、「郡」と本願寺の関係を重要視し、一定の宗教的関係が存在すると考える諸説を真っ向から否定し、「郡」から本願寺へ流れた「懇志」を、一般的な喜捨行為と位置付ける点である。確かに、石田氏以前の研究史では、蓮如の「江沼郡中」宛の「懇志請取」状という事実を持って³⁵⁾、本願寺と「郡」

の関係をめぐる議論を、一定の信仰上の組織的関係においてのみ議論してきた傾向にあった。

ここでは、石田氏が「江沼郡中」と本願寺の関係を、信仰上の組織的関係ではなく、中世後期の武士団（石田説＝「郡」を幕府奉公衆の組織とする）が、中世寺社に行う参詣・祈願に伴う「喜捨」行為とした場合、本願寺と「郡」の関係が説明しきれない部分を取り上げ検討したい。

- (1) 江沼郡中宛「蓮如書状」の書き止め文言は、「穴賢々々」となっている。「穴賢（あなかしこ）」は、「書札作法抄」によると³⁶⁾、一般的用法として主人が家人に差し出す書札として指南している。とすれば、「郡」を幕府奉公衆の一揆組織とみて、そこからの「喜捨」への請取状と考えにくいのではないか。すくなくとも、蓮如が「江沼郡中」宛以外に同様な書札例をもって「懇志請取状」を発給した例はなく、やはり一般的には教団内に宛てた文書として考えるのが妥当ではなかろうか。
- (2) 江沼郡中宛「蓮如書状」が、「六日講四講並所々御書」に伝來した点はどのように考えるべきか³⁷⁾。ただ、「六日講四講並所々御書」に写本として伝來するのみで原本確認ができなかったといううらみがあったが、原文書と目される蓮如自筆「書状」が1997年に福井・高岡・岐阜で開催された「蓮如上人展」に展示され史料批判上の問題が解消した³⁸⁾。とすると、永禄4年に「六日講四講並所々御書」が書写された際、本「書状」が六日講および四講周辺に書写・伝來したものと考えねば成らなくなる。つまり、江沼郡中宛「蓮如書状」は、戦国期本願寺教団内では組織内において伝来させるべき文書として取り扱われたと考えるべきで、これを教団外に宛てた文書として考えること自体に無理はない。
- (3) 江沼郡中宛「蓮如書状」は、戦国期本願寺教団の書札礼からみると、一般に「懇志請取状」と分類される文書群に入ると考えられる³⁹⁾。とすれば、「六日講四講並所々御書」に本「書状」が伝來したことと考え合わせると、蓮如は、江沼郡中という本願寺と宗教的関係を持つ組織に、一般的門徒組織（＊＊講中・＊＊惣門徒中・＊＊國門徒中）と同様な「懇

志」の請け取りを書き送ったと考えるのが妥当になる。

- (4) 「江沼郡中」のみではなく、教団と一揆組織の連続がみられる事例はある。近江国中郡周辺で形成された「番方講」は、一揆と講が連続した典型的な例である。(「番方講」宛「実如書状」「江沼郡中」の事例が、「番方講」と同一範疇に入るとすると、加賀においても、当初から「本福寺跡書」にみられるような「番衆」(武装門徒)に類する組織形成があったと想定される⁴⁰⁾。

このように考えてくると、「郡」を幕府奉公衆の一揆組織であるとする石田説による限り江沼郡中宛「蓮如書状」は理解不能という事態に陥る。つまり、「江沼郡中」と蓮如・本願寺の関係を検討する限りにおいて、両者の有機的結合を前提とする議論を行うべきと考えるのが支配的空気と考えるのが妥当であろう。

「郡」と守護公権 一今後の課題一

さて、1980年に私は、加賀一向一揆における「郡」の組織的本質を、国人庄官連合とみなし本願寺との組織的関与を否定する金龍 静氏の諸説を批判し、本願寺と密接な関係を持つ在地領主連合ではないかという論議を提示した⁴¹⁾。この論考のなかで金龍説批判の大きな骨子となったのが、江沼郡中宛「蓮如書状」の文言をめぐる解釈の問題であり、石田説を批判する論拠ともなる「郡」と本願寺の関係の解釈である。

山田光教寺の「江沼郡中」による「取立」文言の解釈の問題である。前節で述べた通り、「江沼郡中」と蓮如・本願寺の関係を有機的結合として理解することが一定の根拠を有するものと判断する事が出来る。この事実を踏まえて「取立」文言を再解釈すれば、「郡」と本願寺の関係がより明瞭なものになるものと思われる。

かつて、川崎千鶴氏は、関連史料の解釈から、「郡」が守護制下の組織から一向一揆の組織へと変化したと考えた⁴²⁾。川崎氏の諸説の特徴は、長享期以降の「郡」が守護公権を継承したと考えられる事象に注目し、その過程を「郡」の組織的性格の変化として位置付けたところにある。川崎氏以降の研究史においては、片山 伸氏が『今古独語』に引く「三か条綻」を素材として、天文(1530~40年代)

年間の本願寺・「郡」成敗権を検討され、「郡」が本願寺守護権を執行する組織であるという見通しを提示された⁴³⁾。

確かに、小論でも考察したように、文明6年一揆発生を機として「郡」は本願寺に結集する村落領主層が、半高田・半幸千代(半守護)抗争を支える組織として成立させたものである。ただ、私は、当初より「郡」が守護公権を継承し、本願寺守護権を構成する組織になったとは考えず、1470年代後半から90年(文明・長享・延徳・明応年間)にかけて惣荘村落の支配権から地域的一揆体制としての「郡」が成立し、加賀四郡支配の実現過程で「守護権」を代行する運動体となつたと考えた⁴⁴⁾。

ここでは、紙幅の関係から「郡」が守護公権をどのように奪取・継承するのかという問題を詳しく検討することはできない。ただ、一向一揆による惣荘村落の支配権確立から地域的一揆体制としての「郡」という視点を重視すれば、「郡」が文明7年一揆を反政親闘争として組織し、その際に本願寺蓮如は、仏法の領分の問題ではないので國の儀には立ち入らなかつたという対応、すなわち、1475年以降の長享一揆(1488年)までの本願寺と「郡」の関係を改めて問い合わせ直す作業が要請されよう。

参考文献

- 1) 「室町幕府奉行人清元定と『斎藤親基日記』の関連をめぐって 一同記紙背文書の紹介と検討を中心に」(『国史学』No.137)。
- 2) 神田千里「加賀一向一揆の発生」(『史学雑誌』90編11号、1981年、後に、神田『一向一揆と真宗信仰』1991年 吉川弘文館に改定収録)。
- 3) 「新出御文集に就いて」(『真宗研究』No.2 1956年)。
- 4) 「蓮如と文明6・7年一向一揆」(光華会編『続・親鸞と人間』1992年 永田文昌堂)、金龍 静氏からは、「越前淨得寺御文集」の撮影写真コピーを恵与していただいた。日ごろからの金龍氏のご指導・教示に感謝申しあげる次第である。
- 5) 石田晴男「戦国期加賀における『郡中』について(上)」(『仏教史学研究』31巻1号 1989年)。
- 6) 本稿で使用したのは、『改定増補版 真宗史の研究』(1977年 同朋舎出版)であり、当初に発表された学会誌を閲覧し、谷下氏の編集・出版時における論議の修正や、訂正箇所を確認することはしていない。
- 7) 一向一揆の研究史については、金龍 静「一向一揆の研究史」(『大系 日本歴史』2 中世 1985年 山川出版社)がある。
- 8) 「専修寺文書」No.15(『真宗史料集成』4巻 専修寺・諸派 1983年 同朋舎出版)
- 9) もっとも最近のすぐれた研究としては、小島道裕「近江金森一揆の背景」『講座蓮如』1巻)が注目される。
- 10) 「専修寺文書」No.16, 18, 19(『真宗史料集成』4巻)。
- 11) 「専修寺文書」No.49(『真宗史料集成』4巻)。同時期の、本願寺への末寺・門徒の番勤仕については、「本福寺

- 跡書」(『真宗史料集成』2巻 蓮如とその教団 1977年 同朋舎出版)。に記述が見える。本願寺の番衆については、金龍 静「卅日番衆考」(名古屋大学『日本史論集』上 1975年 吉川弘文館), 遠藤 一『戦国期真宗の歴史像』(1992年 永田文昌堂)。
- 12) 後に、平松令三『真宗史論攷』(1988年 同朋舎出版) に収録。
- 13) 『顕正流儀鉄』(『真宗史料集成』4巻)。
- 14) 『顕正流儀鉄』について、堤玄立「真慧上人の往生義」(『信と証』1981年 法藏館), 稲垣舜岳「真慧上人の顕正流儀鉄」(平松令三編『高田本山の法義と歴史』1991年 同朋舎出版)。
- 15) 吉崎を拠点とした北陸での蓮如の活動において、専修寺との関係を重視したのは、重松明久『中世真宗思想の研究』(1969年 吉川弘文館)である。
- 16) 蓮如と真慧の教学対立問題は別の機会に論じなければならないが、直感的な表現であるが、両者に際立った思想的対立は見出しそうに思われる。
- 17) 『白山史料集』上(1979年 石川県図書館協会)。
- 18) 『諸文集』No.281 (『真宗史料集成』2巻)。
- 19) 『諸文集』No.306 (『真宗史料集成』2巻)。
- 20) 「越前淨得寺御文集」(『蓮師教学研究』No.2)。
- 21) 「蓮如と文明6・7年一向一揆」(『続・親鸞と人間』)参照。
- 22) 「蓮如と文明6・7年一向一揆」(『続・親鸞と人間』)において、「奉書」の存在を、類例が室町幕府関連文書にみえないことから、「奉書」自体の存在を疑問視するか、別旨の「奉書」の蓮如による可能性があると論議したが、本稿での検討の通り何らかの形で、富樫政親支援の「奉書」が加賀国に宛てられた可能性が高いと考えるにいたった。この点、前稿を訂正しておきたい。
- 23) 『真宗史料集成』2巻。
- 24) 「郡」については、遠藤 一『戦国期真宗の歴史像』。
- 25) 遠藤 一『戦国期真宗の歴史像』, 「蓮如と文明6・7年一向一揆」(『続・親鸞と人間』), 「蓮如の『王法』論」(九州龍谷短期大学仏教文化研究所編『仏教文化』No.8 1998年)で私見を提示している。
- 26) 『諸文集』No.19, 26 (『真宗史料集成』2巻)。
- 27) 『諸文集』No.31, 32, 36 (『真宗史料集成』2巻)。
- 28) 「中院文書」(『加能古文書』No.996)
- 29) 本文書を、本格的に使用されたのは、井上銳夫『一向一揆の研究』(1969年 吉川弘文館)。また、神田千里(『一向一揆と真宗信仰』)。
- 30) 井上銳夫『一向一揆の研究』。
- 31) 神田千里『一向一揆と真宗信仰』。
- 32) 加賀一向一揆研究に関する文献目録としては、井上銳夫『一向一揆の研究』の巻末「文献一覧」, 神田千里「文献一覧」(峰岸純夫編『本願寺・一向一揆の研究』戦国大名論集13 1984年)。
- 33) 石田晴男「戦国期加賀における『郡中』について(上)」(『仏教史学研究』31巻1号)。
- 34) 「諸文集」No.296 (『真宗史料集成』2巻)。
- 35) 遠藤 一『戦国期真宗の歴史像』の「あとがき」で、自説からの石田氏の論議に対する見通しのみは述べておいた。
- 36) 「書札作法抄」(『群書類従』)
- 37) 「六日講四講並所々御書」(龍谷大学大宮図書館蔵)。蓮如分は、『諸文集』No.288~305 (『真宗史料集成』2巻)。
- 38) 『蓮如上人展』図版 No.131 (1997年 共同通信社)。尚、図版解説は木越祐馨氏が担当されている。
- 39) 泊 清尚「本願寺懇志請取状の成立と展開—金品請取文言を持つ蓮如・実如書状の分析—」(『中世仏教と真宗』) 遠藤 一「蓮如の時代」(九州龍谷短期大学『仏教文化』No.6 1996年)において、「越前淨得寺御文集」(『蓮師教学研究』No.2), 「室町幕府奉行人清元定と『斎藤親基日記』の関連をめぐって—同記紙背文書の紹介と検討を中心に」(『国史学』No.137) 以後の私見はまとめておいた。
- 40) 近江中郡門徒中宛「実如書状」(『真宗聖教全書』第5巻 1941年 大八木興文堂), 「番方講」と一向一揆の関係については、遠藤 一「一向栗本衆の消長」(『栗東の歴史』第3巻 近世 1992年 栗東町役場)。
- 41) 金龍 静「加賀一向一揆の形成過程」(『歴史学研究』No.436 1976年, 後に峰岸純夫編『本願寺一向一揆の研究』) , 遠藤 一「加賀一向一揆の歴史的前提(一)」(『仏教史研究』No.13 1980年, 後に峰岸純夫編『本願寺一向一揆の研究』ならびに遠藤『戦国期真宗の歴史像』に収録)。
- 42) 川崎千鶴「加賀一向一揆の展開」(『日本史研究』No.106 1969年, 後に峰岸純夫編『本願寺一向一揆の研究』に収録)。
- 43) 片山 伸「加賀一向一揆における成敗権の性格について—「三箇条掟」をめぐる考察—」(『仏教史学研究』27巻2号 1985年)「加賀一向一揆と本願寺守護権—「三箇条掟」をめぐる考察—」(北西 弘先生還暦記念会編『中世社会と一向一揆』1985年 吉川弘文館)。
- 44) 遠藤『戦国期真宗の歴史像』。
- 45) 「今古独語」(『真宗史料集成』2巻)。

一般論文

剣道における打突動作(2) —「対角線活動」と「ナンバ」—

木寺英史

A Study of DATOTSU Movement in KENDO (2)
—'Action of Diagonal' and 'Nanba'—

Eishi KIDERA

はじめに

筆者は先に剣道技術の中心課題である「打突動作」に着目し「森田理論」の考察を試みた¹⁾。「森田理論」の特筆すべき点は、「対角線活動」の法則に注目し打突動作の合理的理論の構築を試みたことにある。しかし、その結果、新たな課題（矛盾点）が明確になった。それは「対角線活動」の法則と「ナンバ」との関係である。「森田理論」では、打突動作の基礎は現在の「歩行原則」つまり「対角線活動」の法則にあるとしている。しかし一方、日本の伝統的身体操作の方法に「ナンバ」があるともいわれている。「ナンバ」は一般に現在の走歩行の原則には則らず、体の同側の上下肢が同方向に動く運動形態であると言われている。

日本の伝統的身体運動である剣道の打突動作も本来「ナンバ」を基礎としていたとするならば、剣道の「打突動作」に「対角線活動」の法則を適用させることの妥当性から問い合わせなければならない。そこで、現代剣道の合理的な打突理論構築の基礎的研究として、「対角線活動」と「ナンバ」について考察し両者の関係について検討することとした。

1. 「対角線活動」の法則

「対角線活動」の法則とは言うまでもなく一般型走歩行において、右手と左足・左手と右足がほぼ同時に同方向へ動くことを言う。森田は「天地自然の理」として、

1. 歩く人も、走る人も、男も女も、左手を出した時は右脚をだし。

2. 右手を出した時は左脚を出している。

3. 脊柱を隔てて対角線上にある手足は、常に同方向に動くものである²⁾。

としている。この走歩行時に発現する四肢の法則については異論を挟む余地はないであろう。しかし、「対角線活動」の法則をこのように上下肢の運動のみで説明することには無理がある。それは、四肢のみの運動に着目することでは様々な運動に適応し得る法則が導きだされないからである。様々な運動の中で脊柱を挟んだ上下肢が同方向に動く一般型走歩行は、上下肢に運動の制限がない場合にあらわれる極めて特異な運動ととらえなければならない。多くの日常生活や競技では、その目的遂行の為に四肢、特に上肢は様々な制約を受けるのが一般的である。よって、四肢ではなく体幹の動きにも着目して「対角線活動」の法則を再検討したい。森田も

対角線といえば、脊柱を隔てて、右腕と左脚、左腕と右脚である。腰部も左、右に分けて考えるので左脚は左腰につづき右脚は右腰につづくので同意になる³⁾。

と述べ、腰と上肢の動きに注目している。

まず、歩行時の下肢運動と骨盤の回転について述べてみたい。日常の歩行運動ではほとんど意識されていないが、我々は歩行時に骨盤を回転させている。回転するという表現も適切ではない。実際には骨盤自体の回転はほとんどなく、脊椎が捻じれているがここでは理解を容易にするために回転と表現する。森田も述べているように、大まかには右足と右腰、左足と左腰は同方向に運動しているととらえられる。右足が前方に振り出される時には、右腰も前方に移動するように骨盤が回転し、左足が振り出される時

には左腰が前方に回転する。つまり、歩行時には骨盤は主に水平方向に回転を繰り返していることになる。しかし、その回転の大きさや切り替えの時期については個人差がある。これらの差異については、今後の研究課題でもあり動作分析等の詳細な検討も必要であるが、ここでは左右の足の振りだし方向に骨盤がほぼ同時かやや遅れて回転することを確認することにとどめ論を進めたい。

さて、次に左右の足が交互に振りだされる場合の体幹の動きに着目してみたい。先に述べたたようすに右足が振り出される時にはほぼ同時かやや遅れて右腰が前方に回転するが、この場合体幹はそのバランスを保つために左肩が前方に回転する。左足が振り出される時にはその逆の運動が見られる。つまり、骨盤と肩はお互いに補償し合うように逆方向に回転している。そして、上肢は肩の回転と同方向にほぼ同時にかやや遅れて振られることになる。つまり、歩行運動を上方からみれば、右足が前方に振り込まれる時には、骨盤が反時計周りに回転し、それとともに肩は時計周りに回転することになる。この場合、左肩が前方に回転するとともに左腕がほぼ同時に前方に振られることとなる。左足が前方に振り出される時には回転の方向が逆になる。これが「対角線活動」の法則での体幹の動きである。

2. 「ナンバ」歩きに関する「誤解」

「対角線活動」の法則を検討したところで、ここでは「ナンバ」歩きと「対角線活動」の法則について言及する。「ナンバ」に関する先行研究において、その中心となる「ナンバ」歩きの運動形態について非常に疑問となる内容がある。その疑問とは、「ナンバ」歩きとは「左右の半身を繰り返す運動である」と解釈されていることである。例えば野村は、

ナンバとは右足と右腕をそえろえて前に出したいわゆる半身の構えのことで、簡単に言えば、農夫が鋤を手にして畑を耕す姿勢である。盆踊りなどでもそうだが、右足がでれば右手も同時に出てこのナンバが日本の芸能の基本なのだ。この姿勢で右半身、左半身と交互にだして歩行に移ると、歌舞伎の六方（ろっぽう）でその誇張された形がみられるようなナンバ歩きになる。幼稚園児たちを行進させようとすると、右手と右足、左手と左足をいっしょにだして歩きだすことがあるが、日本人の固有の歩き方は、極端にいうとあんな形だったのだ。ただ、腕はほとんどふらない。したがって、右肩と右足、左肩と左

足がいっしょにでるわけだ⁴⁾。

と述べている。このように「ナンバ」歩きとは右足が振り出される時には同時に右肩が前方に動き右半身になり、左足が振り出される時には左半身になるという動作を繰り返すと考えられている場合が多い。これを「対角線活動」の法則で考察すれば、現在の一般型歩行とは全く異なる運動であるといえるが、この「ナンバ」歩きといわれている運動を実際に我々の先祖が日常的に行っていたとは考え難い。日常的に訓練されていたとしても、この半身を繰り返す歩き方では円滑に前方に進むことはできないと思われる。では、なぜこのような「ナンバ」歩きに関する解釈が生まれたのであろうか。それは、「ナンバ」の特性と考えられている二つの事柄を混同させたためであると考えられる。

まずは、「ナンバ」歩きでは「右の手足、左の手足がほぼ同時に同方向に動く」と言う特性がある。広辞苑にも「ナンバ」とは「歌舞伎や舞踊の演技で、右手が出る時右手を出すような、普通とは逆の手足の動作をいう」とある。一方、「ナンバの基本姿勢は半身である」という特性を持つ。これは、「ナンバ」の姿勢が農作業で多くみられる半身を基礎とすることからきている。この二つの「ナンバ」の特性を短絡的に関連させたことによって「ナンバ」歩きが「左右の半身を繰り返す」という「誤解」が生じたと考えられる。

3. 「常歩（なみあし）」歩行（本来の「ナンバ」歩き）とは

それでは、本来の「ナンバ」歩きを詳細に考察し「対角線活動」の法則と照らし合せることによって、「ナンバ」歩きが「左右の半身を繰り返す」という通説が「誤解」であることを明らかにしたい。本稿では、本来の「ナンバ」歩きを「常歩（なみあし）」歩行、その基礎となる身体操作を「常歩（なみあし）」というものとする。京都大学総合人間学部、小田伸午氏は本来の「ナンバ」の基礎はウマの歩様の一形態である「常歩（なみあし）」にあるという論を提唱している。「常歩（なみあし）」では左右の前肢、後肢が同時に接地するのではなく、「左後肢・左前肢・右後肢・右前肢」順で接地する。後述するが、本来の「ナンバ」歩きも「左足・左手・右足・右手」の順で接地するように四肢が振られることに特徴がある。よって、本稿では本来の「ナンバ」を「左右の半身を繰り返す」と考えられている「ナンバ」と

区別するために「常歩（なみあし）」というものとして論を進めたい。

前章で述べたように、一般型歩行では、個人差はあるが骨盤と肩がほぼ逆方向に回転する。これが「対角線活動」の法則である。しかし、「ナンバ」歩きとは同側の足と肩が同時に同方向に動き（回転し）、「左右の半身を繰り返す」ととらえられている。つまり、一般型歩行では体幹が捻じれるのに対し、「ナンバ」歩きでは体幹は捻じれない運動であると考えられている。しかし、「常歩（なみあし）」歩行でも一般型歩行と全く同様ではないが「対角線活動」を認めることができる。

先に検討したように、一般型歩行は脊柱を中心に骨盤と肩がほぼ反対方向に捻じれながら運動をする。「常歩（なみあし）」歩行はその捻じれが抑制された歩行運動である。「ナンバ」歩きでも「常歩（なみあし）」歩行でも、体の同側の手足がほぼ同時に同方向に振り込まれる。しかし、「常歩（なみあし）」歩行では、例えば右足体重になり右手が下方向へ振りこまれる時に右肩は前方に動くことになる。それと同時に左足が前方に振り出される。つまり、右足に体重が乗り左足が前方に振り出されるときに右肩は前方に移動（回転）するのである。そして、左足が着地し右足が振りだされると、左手の下方向への振りこみと同時に左肩が前方に動くことになる。このように「常歩（なみあし）」歩行では、肩の水平方向への移動は、左足が振り出されるとほぼ同時に右肩が前方へ動き、右足が振り出される時には左肩が前方へ動く。よって、現行の一般型歩行と同様に「常歩（なみあし）」歩行でも「対角線活動」がみられる。ただ、一般型歩行での「対角線活動」が骨盤と肩の回転がほぼ逆になるのに対して、「常歩（なみあし）」歩行での「対角線活動」は骨盤の回転を肩がやや遅れて追いかけるのであり、双方の「対角線活動」が全く同じなのではない。よって、手足の動きも同側の手足が全く同時に動くのではなく、足の動きにやや手が遅れて振られることになり、「左足・左手・右足・右手」の順序で接地するように振られる。つまり、「常歩（なみあし）」歩行とは一般型歩行に比して骨盤の回転に対して肩の回転の切り替えしが早い時期に行われ、さらに回転の角度も個人差はあるが小さく押さえられている。

さらに本来の「ナンバ」歩き、つまり「常歩（なみあし）」歩行が本来「対角線活動」をともなうものであった事を推測させる事項がある。「ナンバ」歩きとは前述のように「左右の半身を繰り返す」こ

とを基本としながらも、全身が揺れるのではなく、腰を入れて腰から下だけが前進するようにし上半身は揺れないとする説があることだ。この場合、例えば右足がでる時には右肩がでるのを最小限に押さえると考えられているようだ。上体が揺れないことが基本であることは理解できるが、この場合左右の半身になるのを最小限に押さえたと解釈するには無理がある。骨盤の動き相対して考えれば、上半身が揺れないということは明らかに「対角線活動」が存在するということある。つまり、上半身を揺らさず固定するためには骨盤の回転に相対して肩を逆方向に回転させる必要があり、それはとりもなおさず「対角線活動」がともなうと言わなければならない。

4. 「常歩（なみあし）」原理

「常歩（なみあし）」歩行が「対角線活動」を保持した運動であることを示したが、本章では「常歩（なみあし）」歩行に代表される「常歩（なみあし）」という運動形態の原則に迫りたい。先に述べたように、「常歩（なみあし）」歩行には「対角線活動」が見られるものの、骨盤と肩の回転を抑制することにその特徴がある。この、骨盤と肩の回転を抑制することは「常歩（なみあし）」という運動形態の原則であるが、「常歩（なみあし）」にはそのための重要な特徴がある。これを「常歩（なみあし）」歩行の運動経過を検討しながら考察したい。

「常歩（なみあし）」歩行で右足体重になり左足が振りだされる過程において、右肩が前方に回転することは述べたが、この場合右肩は前方に動く（回転する）と同時に下方向に動く。下方向に動くというより、下方向への力が加わると述べる方が適当であるかもしない。この下方向への動きは右足と右手がほぼ同方向に振られる事に起因する。さらに考察すれば、右足に体重が乗り、左足が後方から前方に振りだされる時には、骨盤の右側が上方へわずか動くことが確認される。それと同時に右肩が下方向に動くことにより体側を骨盤の右側と右肩が上下からはさみこむようにして、骨盤と肩の回転を抑制していると考えられる。言うまでもなく、左足に体重がかかり右足が振りだされる時には逆に骨盤の左側が上がり左肩が下がる。つまり、「常歩（なみあし）」歩行では体重がかかる側の骨盤と肩を支点として反対側の足と腕を振りこむという運動を繰り返していくことになる。換言すれば、体の左右に軸を形成し、その軸を交互に支点とすることによって足を踏み変えて前進するというのが「常歩（なみあし）」歩行

の特徴である。この左右の軸を形成するために体の同側の手足をほぼ同時に振るのが「常歩（なみあし）」歩行である。軸という観点で述べれば、一般型歩行は中心軸を形成し「対角線活動」により体幹をねじり、さらに振りだされる足の反対側の上肢を振りだすことによってバランスを取りながら歩行するが、「常歩（なみあし）」歩行は、中心軸を形成しながらさらに左右の軸により効率よく身体を操作する歩行運動であると言えよう。つまり、歩行という運動形態に限らず、「常歩（なみあし）」とは「体幹の水平・上下方向の捻じれ作用により体の同側の腰と肩により軸を形成しその軸を支点として行う合理的な身体操作」であると言える。

5. 「対角線活動」の法則による打突動作

さて、「常歩（なみあし）」原理を明らかにしたところで「森田理論」を考察してみたい。「森田理論」は「歩行原則」つまり「対角線活動」の法則を打突動作の基礎としているが、ここでは先に考察したように下肢と体幹の動きに着目して「森田理論」での打突動作を再検討する。

「対角線活動」の法則による打突の最大の特徴はその初動にある。森田は打突時の初動は左腰から起こるとしている。右自然体の中段の構えから、左腰を前方に回転させると同時に右足を前方に出すとしている。右足を振り出す時に左腰を前方に回転させることは「対角線活動」の法則に反するようであるが、これは右自然体から前方に位置する右足を出すための独特な体の運用である。右足を前方に振り出すためには、左足に十分に体重が乗る必要がある。右自然体から後方に位置する左足を前に出し、その後右足を振り出すのが本来の運動である。しかし、右自然体から右足を出す場合には、左足を出す動作を左腰を前方に回転させることで補っていると考えれば、右自然体からのこの初動の方法は「対角線活動」に則ったものであるといえる。ただ、森田も述べているが実際の打突ではほとんど左腰の前方への回転は確認できない。つまり、左腰の前方への動きを意識することで左腰と足が後方へ流れることを抑制しているとも考えられる。

左腰を前方に回転させ右足が出されると、やがて骨盤の回転は切り替わるが、左肩はさらに前方に回転し、その左肩を支点として竹刀が振り上げられることとなる。よく指摘されるように竹刀の振り上げは左主動で行われることとなる。この竹刀振り上げ最高時にでは、右足の前方への振り出しと左肩の前

方への回転という体幹の補償作用が見られることとなる。次に打突の後半部であるが、森田は「やがて、右足が着地する頃、左手は引手に変わり、右手も押手の本領を發揮して、三味一体となって、左足の着地を迎えて一拍子の打ちを完了する」⁵⁾と述べている。体幹の動きに注目すれば、右足が着床する頃に肩の回転は逆になり、左肩は後方に右肩が前方に回転する。左肩の後方への回転が左手の引手につながり、右肩の前方への回転が右手の押手を誘導し打突が完了する。

6. 「森田理論」と「常歩（なみあし）」原理

「森田理論」を体幹の動きを中心に考察したが、さらに「常歩（なみあし）」原理から検討することにする。しかし、その前に「左右の半身を繰り返す」ととらえられている「ナンバ」と打突動作について触れておきたい。言うまでもなく「ナンバ」では合理的な打突動作を構築することはできない。合理的な打突ができないどころか、「ナンバ」は森田が指摘する現代剣道の通弊を生じる身体操作である。中段の構えから「ナンバ」で打突すれば、右脚が前方へ出されるときに右肩が前方へ回転することになる。この方法では打突完了時に右半身になり左腰が後方へ流れ合理的な打突動作が行われない。このことからも「ナンバ」は合理的な身体操作ではなく、「誤解」された運動であると推察できる。

さて、先に「常歩（なみあし）」とは「体幹の水平・上下方向の捻じれ作用により体の同側の腰と肩により軸を形成しその軸を支点として行う合理的な身体操作である」と述べたが、「森田理論」はその体幹の水平方向の捻れによる打突動作を理論化したものである。「森田理論」は一般型歩行の原則である「対角線活動」の法則を基礎としているが、両手で竹刀を保持する剣道の打突動作に応用したために、肩の回転は歩行時に比して著しく抑制され体幹の水平方向の捻れは「常歩（なみあし）」原理と酷似している。

「常歩（なみあし）」原理による打突では、「森田理論」と同様、左足体重となり左腰を前方に押し出すようにして始動するが、それとほぼ同時に左肩から左腕に力の波が伝わり、竹刀の振り上げ動作がはじまる。ただ、左肩には前方だけではなく下方向への力が加わり左の軸が形成される。左の軸の形成とともに右足は前進を始めているが、竹刀の振り上げ動作終了時かそれよりも若干早い時期に右足が着床する。その後、右足体重になると同時に右の軸が形

成され右肩の前下方への回転とともに竹刀が振りおろされる。つまり、左腰と左足から始まる打突の波が左肩と腕に伝わり、即座に軸を踏み変えて右足から右肩と腕に伝えられることとなる。

この場合、十分に「常歩（なみあし）」原理を生かすためには打突完了時に左足が右足の後方に位置するのではなく、右足の前方に振り出されてもよい。別稿でも述べたが、剣道の打突時における送り足は、合理的な身体操作ではなく引き斬りを基本とする日本刀の操法から生じていると考えられる。つまり、「常歩（なみあし）」による打突とは体幹の水平・上下方向の捻りにより生じる左右の軸を支点とする打突法と言えるが、具体的には左足体重で左の軸が形成されると同時に右足が振り出され、さらに右足体重になり右の軸が形成され左足が振り出される経過のなかに、竹刀の振り上げ振り下ろしが実施されることになる。

む　す　び

筆者は本来の「ナンバ」、つまり「常歩（なみあし）」原理を基礎とした打突理論の構築を試みている。これまで述べたように「森田理論」は、「常歩（なみあし）」原理を基礎とした打突理論にきわめて近いものであることが明らかになった。「森田理論」は打突時における骨盤、肩の水平方向の回転に言及

している。「常歩（なみあし）」原理は「体幹の水平・上下方向への捻じれと左右軸の形成」であるので、「森田理論」は「常歩（なみあし）」原理に基づいた打突理論の一要素を明確にしたものあり、今後の打突理論構築の方向性を示唆している。本研究を基礎とし「常歩（なみあし）」原理の更なる解明と「常歩（なみあし）」打突理論の構築を試みたい。

また、本研究において本来の「ナンバ」、つまり「常歩（なみあし）」原理はあらゆる運動における合理的な身体操作を発現する可能性があることが明らかになった。今後は、剣道の打突動作だけではなく様々な運動への適応についても試みたい。

最後に「ナンバ」および「常歩（なみあし）」原理の考察に際してご指導いただいた、京都大学総合人間学部小田伸午先生、スポーツマッサージ五体治療院小山田良治先生に心より感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 拙稿：「剣道における打突動作 (1) —森田理論の考察—」，1999（平11），久留米工業高等専門学校紀要，第15巻第1号。
- 2) 森田文十郎：「腰と丹田で行う剣道」，1966（昭41），剣道ゆうき会，p20。
- 3) 同前，p23。
- 4) 野村雅一：「しぐさの人間学」（ナンバ歩き，意外とツー），日本経済新聞，1998，10，14。
- 5) 前掲書：「腰と丹田で行う剣道」，p36。

教育研究報告

表計算ソフト「エクセル」を用いた電子軌道シミュレーション（その2） —空間電荷効果を考慮した場合—

杉 森 欣 三

**Simulation of Electron Trajectories with the Aid of Computer Program, "EXCEL"
(Part II) — When the Space Charge Effect is considered —**

Kinzo SUGIMORI

In this paper, a simple and useful method is mentioned for the numerical solution of the simulation of electron trajectories with the aid of personal computer program, "EXCEL". The potential distribution within the boundary region was solved by difference method. And the equation of electron motion was solved by Heun method. And the space charge effect of electron beam is considered in this paper, which was not included in the previous paper. This numerical calculation method with the "EXCEL" described here will be one of the useful education tools for the lecture such as Electromagnetic Theory.

1. はじめに

本文は筆者が本校久留米高専専攻科の機械電気系コースの学生に対して行っている「応用電磁気学」の講義を基本にしてまとめたものである。電磁気学は電気系学生には勿論であるが、機械系ほかの学生にとっても重要な、工学基礎をなす科目のひとつである。しかし学生にとってはわかりにくい科目のひとつである。その原因についていろいろ想像してみると、一つには数式の展開が無味乾燥で、その物理的イメージがなかなかつかめないことが一因と思われる。

そこで筆者はここ数年、パーソナル・コンピュータを併用しながら、演習やレポートを課してその物理的理解を助ける工夫を行ってきた。その一つとして、ある境界領域内の電位分布をラプラス方程式の差分法による数値解法を、表計算ソフト「エクセル」上で展開することを思いつき、実際の講義に使ってみたが、学生にはわかりやすいと好評であった。その詳細についてはすでに報告のとおりである¹⁾。

その後さらに上述の手法を発展させて、静電磁場中の電子の運動（電子軌道）のシミュレーションを同様にエクセル上で展開することを試み、所期の成果を得たので、これも講義に採り入れている²⁾。このシミュレーション手法は、テレビ用カラーブラウン管や通信衛星や放送衛星に搭載されているマイク

ロ波增幅用電子管などの電子銃設計で使用される手法³⁾と、計算精度などを別にすれば基本的には同じである。

しかしながら、これらの解析設計手法をエクセル上で展開することは計算過程や経過をビジュアルにディスプレイ画面上で確認しながら進めることができるので、物理的イメージの理解に大変有効で、教育的効果が高い。またそれだけでなく、簡便性などの点から詳細設計の前の予備設計などの用途にも実用性が高いと思われる。

今回は、前回の電子軌道シミュレーションで考慮しなかった電子の空間電荷効果を計算に追加して、シミュレーション精度を改善すると共に、教育的には空間電荷の効果、影響を体得できるようにしたので以下に報告する。

2. 電子運動方程式とその数値解法

簡単のため座標を2次元直交座標系（x, y）とし、さらに磁束密度零の静電場を考える。

電界強度 $E(x, y)$ の静電場中で電子が受ける力（ローレンツの力） $F(x, y)$ は、

$$F = -|e| \cdot E \quad (1)$$

である。但し、 $-|e|$ は電子の電荷である。また F などの太文字記号はベクトル量であることを示す。

つぎに電子の質量を m とすれば、力 F を受けた電子はニュートンの運動方程式に従い、次式で表さ

れる加速度、 $d^2\mathbf{r}/dt^2$ が発生する。すなわち、

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{F}/m \quad (2)$$

ここで $\mathbf{r}(x, y)$ は電子の位置ベクトルで、 t は時間である。

電子の運動方程式は (1) 式および (2) 式から (3) 式のように表される。

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = -|\eta| \mathbf{E} \quad (3)$$

ここで $-|\eta|$ は電子の比電荷で次の値である。

$$|\eta| = 1.76 \times 10^{11} (\text{C/kg}) \quad (4)$$

また電界強度 \mathbf{E} は電位を $V(x, y)$ とすれば、

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (5)$$

であるから、(3) 式はつぎのようになる。

$$\begin{cases} d^2x/dt^2 = |\eta|(\partial V/\partial x) \\ d^2y/dt^2 = |\eta|(\partial V/\partial y) \end{cases} \quad (6)$$

さらに、電子速度の x 成分および y 成分をそれぞれ $v_x(x, y)$ および $v_y(x, y)$ とすれば、(6) 式はつぎの (7) 式～(10) 式のような 1 階連立常微分方程式に変換される。

$$dx/dt = v_x \quad (7)$$

$$dy/dt = v_y \quad (8)$$

$$dv_x/dt = |\eta|(\partial V/\partial x) \quad (9)$$

$$dv_y/dt = |\eta|(\partial V/\partial y) \quad (10)$$

さらに (7) 式より $dt = dx/v_x$ であるから、これを (8) 式～(10) 式に代入して時間 t を消去すれば、電子の運動方程式はつぎの (11) 式～(13) 式に示すような、 v_x 、 v_y および y の、位置 x に関する 1 階 3 元連立常微分方程式に帰着する。

従って電子軌道、すなわち $y=f(x)$ は以下の (11) 式～(13) 式を解くことによって得られる。

$$dv_x/dx = |\eta|(\partial V/\partial x)/v_x \quad (11)$$

$$dv_y/dx = |\eta|(\partial V/\partial y)/v_x \quad (12)$$

$$dy/dx = v_y/v_x \quad (13)$$

この (11) 式～(13) 式を解く問題は次の初期条件、すなわち、

$$\begin{aligned} x = x_0 &\text{において} & v_x &= v_{x0}, \\ & & v_y &= v_{y0}, \\ & & y &= y_0 \end{aligned}$$

の初期値を出発点とし、独立変数 x の小さい刻みを h とすれば、 $x_1 (=x_0+h)$ 、 $x_2 (=x_0+2h)$ 、……、 $x_n (=x_0+nh)$ と順次、 v_x 、 v_y および y を数値解として求めていく問題である。これは一般に、常微分方程式の初期値問題と言われているもので、その数値解法としては、

- (a) Euler (オイラー) 法
- (b) Heun (ホイン) 法
- (c) Runge (ルンゲ)-Kutta (クッタ) 法

などがよく知られている。その詳細については既に筆者前回報告²⁾で述べており、また専門書や解説書も多いので⁴⁾、ここでは Heun 法を例にその概要をごく簡単に紹介するにとどめる。図 1 にその解法の模式図を示す。

(13) 式を例に説明するとして、今これを、

$$dy/dx = g(x, y) \quad (14)$$

とおく。

$x_n = x_0 + nh$ ($n=1, 2, 3, \dots$) に対する y の値 y_n が得られているとき、そのつぎの $x_{n+1} = x_n + h$ での値 y_{n+1} は Heun 法では次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= h \cdot g(x_n, y_n) \\ k_2 &= h \cdot g(x_n + h, y_n + k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + (k_1 + k_2)/2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

この方法はまず点 (x_n, y_n) での傾き $g(x_n, y_n)$ から求めた点 $(x_n + h, y_n + k_1)$ から、さらにその点での傾き $g(x_n + h, y_n + k_1)$ からもう一度 y_{n+1} を求めなおして、これと先に求めた値との平均をとつ

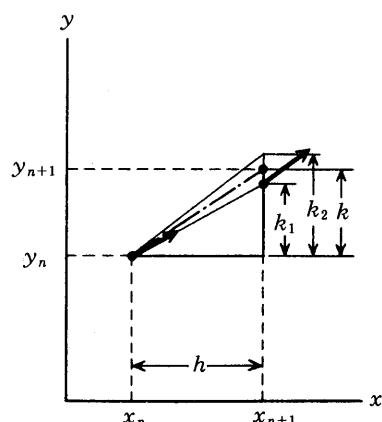


図 1 常微分方程式の数値解法の例 (Heun 法)

て解とする方法である。

以上は(13)式のyに関して解法を説明したが、(11)式、(12)式の v_x 、 v_y についても全く同様である。こうして、刻みhごとにy、 v_x 、 v_y を平行して上の解法に沿って求めながら、終点まで順次進めていけばよい。

3. 空間電荷効果とポアソンの方程式

静電場中の電子の運動は前節で述べた電子の運動方程式を、常微分方程式の初期値問題として、Heun法などの数値解法に従って解いていけばよい。

前回の報告²⁾では電子の空間電荷効果を無視して、空間の電位分布をラプラスの方程式から求めたが、実際には電子自身の電荷により電位がラプラス解より低下するので、計算精度をあげるにはその補正が必要になる。

図2に電子の空間電荷効果を考慮した場合の電子軌道シミュレーション・フローチャートを示す。同図に沿ってその手順を述べるとつぎのとおりである。まず電子が存在しないとした場合の電位分布をラプラスの方程式から求め、これから電子軌道を計算する。

つぎに得られた電子軌道から、電子の空間電荷密度分布を計算して、これを次式のポアソンの方程式に代入して空間の電位分布を求める。すなわち、

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (16)$$

である。ここで $\rho(x, y)$ は点(x, y)における空間電荷密度であり、 $\epsilon_0 (= 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m})$ は

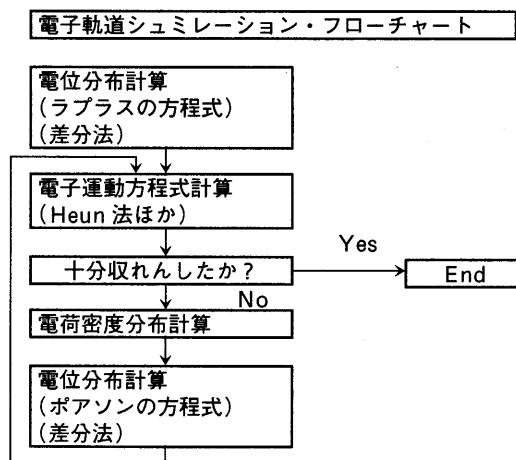


図2 電子の空間電荷効果を考慮した電子軌道シミュレーション・フローチャート

真空中の誘電率である。ちなみに上式で $\rho=0$ とおけばラプラスの方程式になる。

このようにして得られた補正された電位分布から再び電子軌道計算を行うと、最初の1回目の軌道計算結果と若干異なった結果が得られる。さらにこの新しく得られた電子軌道から空間電荷密度分布を計算して再びポアソンの方程式を解けばさらに修正された電位分布を得ることができるので、これからさらに修正された電子軌道計算を行うことができる。これを所望の精度が得られるまで反復計算すればよい。

4. エクセル画面上で実際に解いてみる

さて、本節では実際に空間電荷効果を考慮した場合の電子軌道シミュレーションを、エクセルを使って順を追って解いてみよう。

今、図3に示すような $10(\text{cm}) \times 10(\text{cm})$ の正方形形状の電極と電極電圧の組合せを例に、電極K(陰極)から放出される電子の軌道を計算してみよう。

(1) 領域をメッシュで細分する

ポアソン方程式またはラプラス方程式の近似数値解法の一つとして差分法がよく知られているが、前回報告同様ここでも差分法を用いる。

そのため、図3の電極で囲まれた領域を例えば幅 $h=5(\text{mm})$ のメッシュで縦横それぞれ20等分に細分する。

(2) 電位分布を求める

領域内の電位分布は最初の計算はラプラスの方程式から、2回目以降の計算はポアソンの方程式から

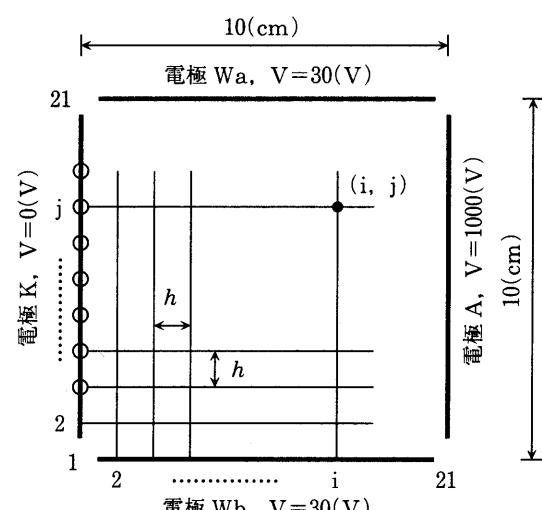


図3 正方形状電極で囲まれ、メッシュで細分化された電場

計算する。差分法ではメッシュ点 (i, j) の電位 $V_{i,j}$ はその上下左右の隣接する 4 つのメッシュ点の電位から次式で計算される ($\rho=0$ とおけばラプラス方程式である)。

$$V_{i,j} = \frac{V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\rho_{i,j}}{\epsilon_0} \cdot h^2 \quad (17)$$

これを領域内の $19 \times 19 = 361$ 点のメッシュ点の電位について求めるのであるが、その詳細についてはすでに拙著論文¹⁾に述べているので、ここでは省略する。図 4 はそのようにして求めた最初の計算結果(ラプラス解)を等電位線表示した図である。

ただし、ポアソン方程式を解く場合は、その前に電子軌道計算結果から空間電荷の密度分布を計算する必要があるので、これをつぎに述べる。

(3) 空間電荷密度分布を求める

今、図 3において電極 K の $y=2(cm)$ から $y=8(cm)$ の帯状の面(紙面に垂直な方向は 1(m) 当たりとする)から I(A) の電子流が一様に放出されるとする。

電極 K 面から距離 x における電子ビームの断面積を $S(x)$ とし、断面内で電子速度および電荷密度が一様として、これを $v(x)$ 及び $\rho(x)$ とすると、 $\rho(x)$ は次式で表される。すなわち、

$$\rho(x) = -\frac{I}{S(x) \cdot v(x)} \quad (18)$$

$S(x)$ および $v(x)$ は電子軌道計算結果から求められる。このようにして求めた電荷密度 $\rho(x)$ を

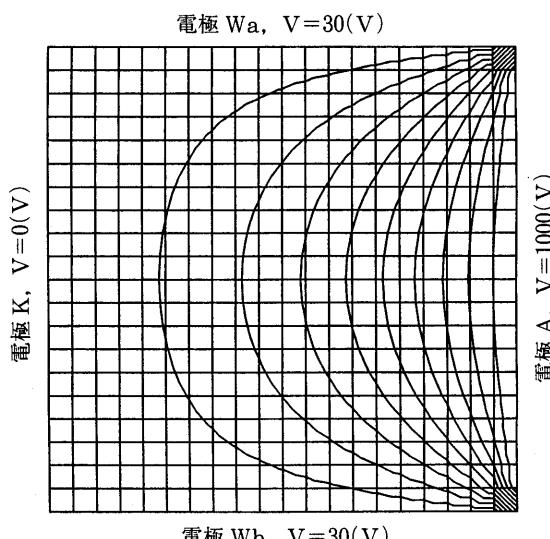


図 4 差分法で求めた電位分布(等電位線表示)

ビーム断面内の各メッシュ点におき、ビーム断面外のメッシュ点には零とおけばよい。そのようにすればラプラスの方程式と同様にして、空間電荷を考慮した場合の電位分布、すなわちポアソン解が得られる。

(4) 電位傾度を求める

つぎに求めた電位分布からメッシュ点の電位傾度 $\partial V / \partial x$, $\partial V / \partial y$ を求める。メッシュ点 (i, j) における電位傾度 $(\partial V / \partial x)_{i,j}$ および $(\partial V / \partial y)_{i,j}$ は次式から求められる。

$$\begin{cases} (\partial V / \partial x)_{i,j} = (V_{i+1,j} - V_{i-1,j}) / (2h) \\ (\partial V / \partial y)_{i,j} = (V_{i,j+1} - V_{i,j-1}) / (2h) \end{cases} \quad (19)$$

エクセル画面上で $\partial V / \partial x$ および $\partial V / \partial y$ の表がそれぞれひとつづつできる。

(5) 電子軌道計算初期条件

次に初期条件を設定する。電極 K ($x=0$) から電極に垂直に初速度 0 で、 $y=2(cm)$, $3(cm)$, $4(cm)$, $5(cm)$, $6(cm)$, $7(cm)$ および $8(cm)$ の計 7 カ所(図 3 の電極 K の○印の点)から電子が放出されるものとする。

$$\begin{aligned} y &= 2(cm) \text{ から放出される電子の初期条件は}, \\ x &= 0(m), \\ y &= 0.02(m), \\ v_x &= 0(m/s), \\ v_y &= 0(m/s) \end{aligned}$$

である。

ここでは Heun 法により刻み $h(m)$ 毎に計算を進める。刻み h は小さいほど精度が上がるが本稿では一応、領域を 20 等分したメッシュ幅の 5(mm) を刻みとして計算する。すなわち、

$$h = 0.005(m)$$

である。

(6) 仮想電極設定

さてこれで計算を実行開始すればよい訳であるが、(11) 式～(13) 式の電子軌道計算式を見ると明らかに分母に v_x を含んでおり、電子放出面($x=0$)では初期条件を $v_x=0$ としているので、このままでは計算を開始できない。そこで電子放出面に十分近く、かつ平行な仮想電極面を想定して、その面から電子が次に述べる速度で出発するものと考える。

仮想電極面の電位を V とすると、この面を通過する電子の速度は次式で表される。すなわち、

$$v_x = \sqrt{2 \cdot \eta \cdot V} = 5.931 \times 10^5 \times \sqrt{V(m/s)} \quad (20)$$

また仮想電極面を電子放出面に十分近く平行としたから仮想電極面においても $E_y=0$ と考えてよく、従って v_y は電子放出面と変化なく $v_y=0$ である。

この計算では1メッシュ幅5(mm)離れた面を仮想電極面とした。その電位は既に求めてあるから、その値を使って式(20)から仮想電極での電子速度を計算すればよい。

(7) 軌道計算実行

これでようやく計算を開始できる条件が整った。エクセル画面上で $x=0.01(m)$ に対応する最初のセルに計算式を入力するが、そのつぎのステップのセルからはこれをドラッグ・コピーしていくべきなので簡単である。

計算では電子の位置での電位傾度 $\partial V / \partial x$, $\partial V / \partial y$ の値が必要であるが、これは項(4)で準備しておいた表から呼び出せばよい。本稿では電子の位置に最も近いメッシュ点での値を用いた。

これを電子出発点が $y=2(cm)$, $y=3(cm)$, $4(cm)$,の各々のばあいについて順次、同様にして計算を行えばよい。

5. 電子軌道シミュレーション結果

図5はラプラス解の電位分布から計算しただけの、電子の空間電荷を考慮しない場合のシミュレーション結果である。これに対して図6は空間電荷密度分布を考慮した計算結果である。同図は電子ビームが幅6(cm), 奥行き1(m)の面積から電流が $I=0.2(A)$ 放出された場合である。図5に比べて、軌道が全般的に太くなっていることがわかる。

図7は電子ビーム中の空間電荷密度の軸方向分布を示している。同図の実線(a)は図5の空間電荷を考慮しない場合のシミュレーション結果から得た分布であり、図6はこの実線(a)の分布を入力データとして得た結果である。さらに図7の点線(b)は図6のシミュレーション結果から得た分布である。実線(a)とは若干異なった結果が得られている。さらにこれを新たな入力データとしてシミュレーション計算を行えばより正しい結果が得られるが、ここではこれ以上の再計算は行わなかった。

図8は電子ビーム中心軸上の、距離xに沿った電位の変化を示している。実線(a)は空間電荷を考慮しない場合、実線(b)は考慮した場合である。図9には空間電荷を考慮した場合としない場合の電位差を示している。

この計算例では電子ビーム電流は $I=0.2(A)$ の場合であるが、さらに電流を増加させると、電位分

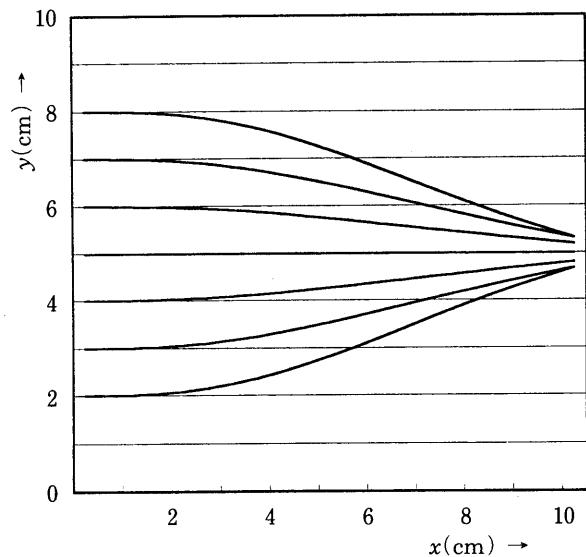


図5 電子軌道シミュレーション結果（空間電荷を考慮しない場合）

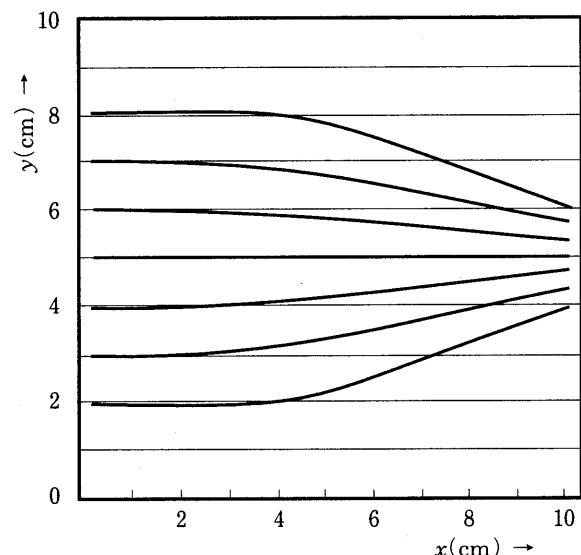


図6 電子軌道シミュレーション結果（空間電荷を考慮したばあい）（ビーム電流 $I=0.2(A)$ ）

布は電極K付近でさらに低下することが予想され、ついには電極K前面の電位傾度が零になる。このときの電流値がいわゆる「空間電荷制限電流」といわれる値で、これ以上の電流を流そうとすると電位傾度が負になり電子が追い返されるので、これ以上の電流を放出することはできない。

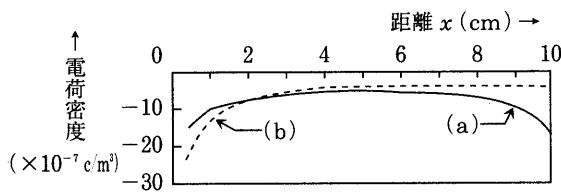


図7 電子ビーム中の空間電荷密度の軸方向分布 (ビーム電流=0.2(A))
(a) (実線) 1回目の電子軌道計算結果による
(b) (点線) 2回目の電子軌道計算結果による

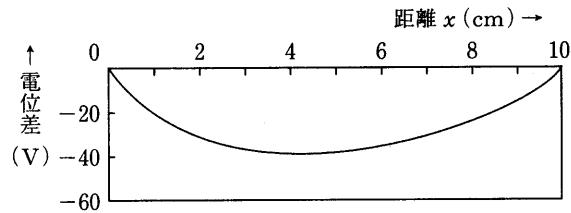


図9 空間電荷を考慮した場合としない場合の電子ビーム中心軸上の電位差 ($I=0.2A$)

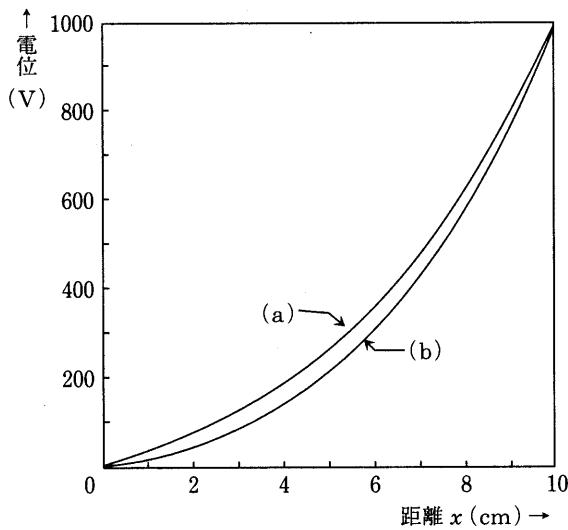


図8 電子ビーム中心軸上の電位
(a) 空間電荷を考慮しない場合 (ラプラス解)
(b) 空間電荷を考慮した場合 (ポアソン解) ($I=0.2A$)

6. あとがき

先にラプラス方程式の境界値問題の、差分法による解法を表計算ソフト「エクセル」を使って解く方法を報告し、さらにこれを発展させて、静電場中の電子軌道シミュレーションへの応用を報告した。

今回は前回の報告で果たせなかった空間電荷効果の影響をシミュレーションに取り込み、計算精度を向上させるとともに、教育用ツールとしての一層の充実を図った。

今回の計算でも磁場があるばあい等は省略したが、今後とも機会をみてさらに充実を図っていきたい。

参考文献

- 1) 杉森:「表計算ソフト「エクセル」を用いて差分方程式を解く」、久留米工業高等専門学校紀要第14巻第2号, pp.57-60, March 1999.
- 2) 杉森:「表計算ソフト「エクセル」を用いた電子軌道シミュレーション」、久留米工業高等専門学校紀要第15巻第2号, pp.45-50, March 2000.
- 3) 日本学術振興会第132委員会編:「電子・イオンビームハンドブック第3版」pp.351-388, 日刊工業新聞社, 1998.
- 4) 例えは、森口:「数値計算工学」pp.183-209, 岩波書店, 1989.

国際会議報告**第7回アルミニウム合金国際会議（ICAA-7）に出席して**

中山 勝

Report on the 7th International Conference on Aluminum Alloys (ICAA-7)

Masaru NAKAYAMA

1. はじめに

西暦2000年の4月9日（日）から14日（金）までアメリカ合衆国バージニア州のシャーロツヴィル（Charlottesville）で第7回アルミニウム合金国際会議（ICAA-7）が開催された。このアルミニウム合金国際会議はアルミニウムに関する国際会議としては世界最大規模で、第4回の国際会議報告¹⁾でも述べたように、この会議はアルミニウムの工業化に飛躍的な発展をもたらしたホール・エルー法の発明100周年を祝して、1986年に同じシャーロツヴィルで第1回が開催されており、以来2年ごとに世界各地で開催されている。日本では1996年9月にICAA-5が豊橋市で開催されている。筆者はこれまで1994年9月にアメリカ合衆国ジョージア州のアトランタで開催されたICAA-4の、また豊橋市で開催のICAA-5に参加し論文を発表した。この度、興味ある研究結果が得られたので、世界のアルミニウム合金研究者に研究結果の紹介と世界の研究者との情報交換をすべく、シャーロツヴィルで開催されたICAA-7に参加し、論文の発表を行った。

本報告では国際会議の報告とそれに加えてシャーロツヴィルの街と、この地にあるバージニア大学（University of Virginia）をも訪ねたので、この大学構内についても紹介する。

2. シャーロツヴィルの紹介

ICAA-7は当初ウイリアムズバーグ（Williamsburg）で開催されることになっていたが、途中予算か何かの理由でシャーロツヴィルに変更された。ウイリアムズバーグは、筆者がペンシルベニア州立大学に留学していたとき、Al-Li合金国際会議が開催された場所で、同研究室のインド人留学生のAtulがこの国際会議で発表するため、他の研究室

の大学院の学生の車でそこに行くと言うことを聞いた。そこで、筆者の指導教授のPaul R. Howellに国際会議に参加したいことを話すと、参加登録費と宿泊費を快く出してくれた。バージニア州はペンシルベニア州と同じく、アメリカ合衆国が英国から独立したときの13州の一つで、州には古い歴史的な町が多く、とくにウイリアムズバーグには日本の明治村のように古い町並みをそのまま復元し、その当時の衣装をつけた人たちが鍛冶屋などで実演している歴史公園がある。ここには年間たくさんの観光客で賑わっているようである。筆者はそのときの印象が強くて、ウイリアムズバーグで国際会議が開催されるならば、ぜひもう一度歴史公園を訪れたいと思っていたので、開催地変更でがっかりした次第である。

ウイリアムズバーグはシャーロツヴィルから150キロ位離れているので、この度の国際会議ではそこを訪れることができなかった。シャーロツヴィルも歴史ある街で、1776年7月4日に独立宣言書を著わした第3代大統領トマス・ジェファーソン（Thomas Jefferson）の出身地である。トマス・ジェファーソンは大農場主の息子として生まれ、農場主の後を継いで、その後国會議員から大統領まで行き着いた人である。シャーロツヴィルにはトマス・ジェファーソンが住んでいた屋敷や調度品等をそのまま保存し、観光地としてボランティアの人たちが観光客20人ほどのグループごとに部屋の中を案内している。トマス・ジェファーソンの旧居は「モンティチエロ（Monticello）」と呼ばれ、写真1の絵葉書に示されるように、ドームをもつエレガントで美しい建物である。モンティチエロは米国の5セント硬貨の裏に描かれている。モンティチエロはホテルからかなり離れたところにあり、筆者らは国際会議の合間を縫って、バスでモンティチエロに行こうと思ったが、バスの便がなくどのようにして行こうかなと考えていたところ、ホテルの玄関前にホ

テルのワゴン車が止まっており、女性のホテルマンがいたので、モンティチエロに行きたいのだが、バスか何かありますか、と尋ねたところ、ホテルの車で送り迎えしてあげることでほっとし、彼女の運転でモンティチエロまで送り迎えしてもらった。季節は4月上旬の春だけなわけで、モンティチエロへ行く途中の街は木々の緑と芝生の緑、それにピンクの花水木の花が街中至る所満開で、何とも言えない美しい光景で感動的であった。花水木はバージニアの州花でとても美しい。筆者は米国に行くといつも思うのであるが、米国東部の街は住宅内は言うに及ばず、郊外まで芝生の手入れと木々の手入れがなされていて、何時行ってもきれいな景色には感動する。日本では見られない光景である。ヨーロッパも同じかも知れない。日本にも紅葉など景色の良いところもあるが、米国のように景色のきれいなところは少ないように思える。このような街に一度は住んでみたい気持ちにかられる。

モンティチエロは小高い丘の上にあり、この広大な土地もトマス・ジェファーソンの土地であった。丘の上からの眺望もすばらしかった。また、シャーロツヴィルのダウンタウンは赤レンガが敷き詰められたおよそダウンタウンとは思えないくらいの雰囲気をかもし出し、恐らくシャーロツヴィルには再び訪れる事はないと思えるが、もう一度尋ねてみたい街である（写真2）。

3. バージニア大学構内の紹介

国際会議中にダウンタウンの国際会議会場のオムニホテル（写真3）から歩いて20分ほどのところにあるバージニア大学をも訪れた。バージニア大学はトマス・ジェファーソンの大学（Thomas Jef-

ferson's University）とも呼ばれるよう、トマス・ジェファーソンによって創設された大学である。この大学のシンボルは「Rotunda」（写真4）と呼ばれるトマス・ジェファーソンが建てた大きなドームをもつ建物である。Rotundaの前には芝

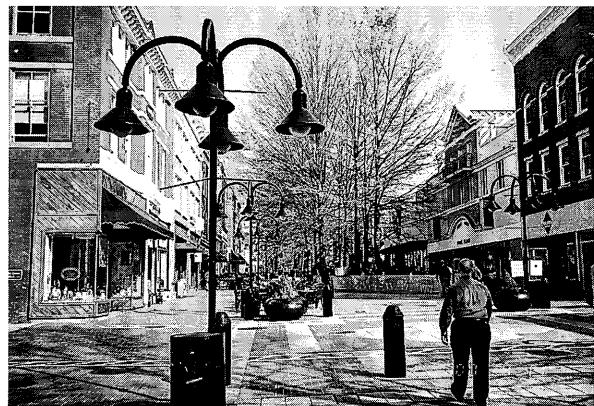


写真2 シャーロツヴィルのダウンタウン

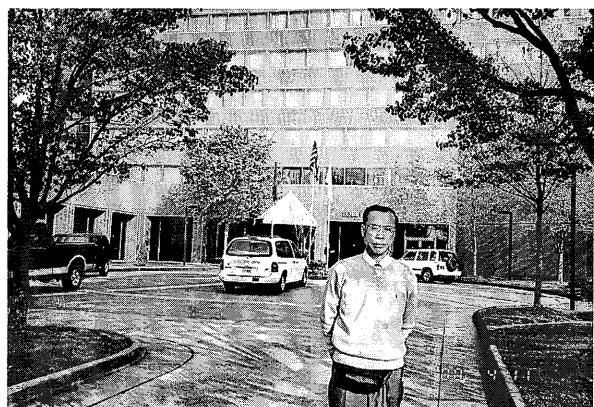


写真3 国際会議場で、筆者らの宿泊場所となつたオムニホテル前にて



写真1 トマス・ジェファーソンの旧居モンティチエロの絵葉書



写真4 バージニア大学のシンボル「Rotunda」と緑の芝生

生が植えられ、前方両側には教授のパビリオンと学生の宿泊施設（寮ではない）が廊下に沿ってずらりと並んでおり、それらの部屋は現在も使われているようである。筆者がいたペンシルベニア州立大学では、建物全てに人の名前がつけられていた。恐らく他の大学でも同じであろう。材料工学科はスタイルビルディング（Steidle Building）と名前がつけられていた。スタイルは材料工学科の名誉教授の名前である。我が久留米高専の材料工学科棟に「中山ビルディング」という名前がつけられることは恐らくないであろう。バージニア大学構内はとにかく広い。およそアメリカの大学はほとんどの大学が建物に名前がつけられていると思われる。ペンシルベニア州立大学は大学警察をもち、警察官は銃を持ち、大学警察のパトカーが巡回しているのをときどき見かけた。日本では考えられない光景である。大学内にはボーリング場、アイスクリーム店などがあり、大学のネームが入ったシャツやノートその他もちろんのおみやげ品が大学構内のブックストアで売られている。大学の外の店々にも大学グッズが売られており、土・日の休日にもなると、外部の人たちがたくさん押し寄せ大学構内外を訪れ、賑わっており大学グッズのおみやげを買って帰る人たちをよく見かけた。バージニア大学にも大学グッズ店があり、筆者もいくつかの大学グッズを買った。アメリカの大学は日本の大学や高専と違い、スケールがとにかく大きい。久留米高専に戻ってくると、スケールの違いに何かしら物足りなさを感じてくるのは私の独りよがりであろうか。

ペンシルベニア州立大学の材料工学科の建物には鉱物の展示室やスイッチを押すと蛍光を発する鉱石の実験コーナーもあり、一般の人たちが訪れていた。バージニア大学ではアメリカンフットボール用のスタジアムの改修工事がなされていた。ペンシルベニア州立大学には10万人収容のビーバースタジアムがあるが、大学対抗のアメフトの試合があると、州内からたくさんの人たちがキャンピングカーで泊まりがけでやって来て、スタジアムの周りはキャンピングカーがずらりと並び、スタンドは満席の状態であった。大学が地域の人たちと一体になっているようであった。日本の大学や高専はどうであろうか。見習うべき点であるが、日本の大学や高専が将来このようになって欲しいと願うばかりである。

アメリカのほとんどの大学には久留米高専と同様構内に学生寮をもっている。学生寮はどれも立派でかなりの数の棟が立ち並んでいる（写真5）。アメ



写真5 バージニア大学内の学生寮群

表1 第7回アルミニウム合金国際会議（ICAA-7）
参加国と参加人数

参加国	参加人数	参加国	参加人数
USA	92	スイス	5
日本*	64	ブラジル	5
イギリス	44	インド	5
ドイツ	25	ポーランド	3
フランス	20	アルジェリア	2
ノルウェー	19	チェコ	2
オランダ	18	ハンガリー	2
中国	16	イスラエル	2
ロシア	13	ウクライナ	2
カナダ	12	エジプト	2
スエーデン	9	トルコ	1
オーストラリア	9	ベネズエラ	1
韓国	7	ギリシャ	1
ベルギー	7	アイルランド	1
イタリア	6	スペイン	1
30カ国		396人	

*富山大8、東工大5、日大3、電通大4、豊橋技科大3、東大等24大学、住友軽金属、YKK、スカイアルミ、古河電工、新日鉄等7企業

リカは広いので、遠距離から来る多くの学生を収容できる寮を用意する必要があるのであろう。とにかくバージニア大学の構内は広く、構内を一通り歩いたが、数時間要し、足が棒のようになってしまった。

4. 国際会議の内容

ICAA-7は4月10日（月）から始まった。前日は登録受付のみが行われた。会議第1日目の4月10日

は、午前中はバージニア大学の Edgar A Starke, Jr. 教授の歓迎の挨拶の後、キーノート講演 (Key-note session) でアルミニウム合金の特性等に関する 6 つの講演があった。

ICAA-7 の参加国と参加人数は参加者名簿をもとにはじき出すと、表 1 のように 396 名に達する。当日参加の手続きをした人を含めると 400 名を越えるものと思われる。参加人数が一番多いのは開催国のアメリカで 90 名強、次いで日本の 64 名、以下イギリス、ドイツ、フランス、ノルウェー、……となっている。とくにノルウェーやデンマークの北欧圏の国からの参加者が多いため注目される。日本からの参加者は表中欄外に示しているように、富山大が多く、次いで東工大、日大、電通大、豊橋技科大、東大と続き、その他 24 大学となっている。一方企業からは住友軽金属、YKK、スカイアルミ、古河電工、新日鉄等 7 企業で、企業からの参加者が少ないので残念であった。

一般の口頭発表講演数 (Oral presentation) は 266 編で、口頭講演の時間は発表 15 分、質疑応答 5 分の計 20 分である。講演発表は 2 会場に分かれてその中にはセッションの初めに Plenary と書かれているので、恐らく総論講演といったところであろうか、この講演が 20 編近くあった。他に研究結果をパネルに貼り、参加者と直接討論するポスターセッション (Poster session) が 11 日 (火) の 13 時 30 分から 15 時 30 分の 2 時間で 33 編の研究論文、12 日 (水) の 18 時から 19 時 30 分の 1 時間 30 分間に 27 編の研究論文の発表があった。口頭発表は 15 分間喋り続ければ終わりである。ポスターセッションではポスターセッションの間は自分のパネルの前にいるだけでもよく楽に思えるが、その間は質問者と 1 対 1 でのディスカッションなので、会話力がないと、相手に自分の研究内容を十分に伝えることができない。いずれにしても大変であるが、国際会議のほとんどが英語での発表となっているので、英語会話力を日頃鍛えておく必要がある。筆者個人の考えであるが、自分のやっている研究成果を世界に向かって発信するには、国際会議で発表することが必要である。アルミニウム合金国際会議ではいずれの回も 3 分冊の分厚い立派な論文集が出版されるが、毎回持つて帰るのが大変である。

ポスターセッションが開かれている時間には口頭発表はなく、参加者すべてがポスターセッションに参加できるようにプログラムが組まれていた。口頭発表、ポスターセッションいずれも活発な意見交換

がなされていた。

今回の会議のセッションは、アルミニウム合金に関して以下のように分類されて、それぞれのセッションで研究発表が行われた。

- (1) Processing and Metal forming (加工及び成形)
- (2) Alloy development and Phase transformation (合金開発及び相変態)
- (3) Rapid solidification and Composites (急冷凝固及び複合材料)
- (4) Fatigue, Creep and Fracture (疲労、クリープ及び破壊)
- (5) Recovery, Recrystallization and Texture (回復、再結晶及び集合組織)
- (6) Casting and Solidification (鋳造及び凝固)
- (7) Microstructure and Mechanical properties (ミクロ組織及び機械的性質)
- (8) Corrosion and Surface modification (腐食及び表面改質)

筆者は、第 1 日目の上記 (2) のセッションで、15 時 35 分から 20 分の持ち時間で、「Interaction between θ' -Al₂Cu and Al₃Sc in Heterogeneous Precipitation in an Al-Cu-Sc Alloy」という論文題目で発表した。Sc (scandium, スカンジウム) は一般の人たちにはあまり耳にしない元素である。Sc は 1223 K 以上で最密六方晶から立方晶に変わり、融点は 1814 K である。ロシア、中国が主生産国である。Sc は他の金属の精錬行程で副産物として得られ、生産量が少ない稀少金属で数年前は 1 g 2 万円以上していた。現在中国から 3 千円位で手に入るようになった。Sc の析出物は成長が遅いので、Sc 添加アルミニウム合金は加熱処理中でも材料の強度低下がない、再結晶を抑制するなどの長所がある。筆者はアメリカ留学中にアルミニウム合金の時効硬化及び析出に関する研究に携わったので、帰国後もアルミニウム合金の時効・析出挙動に関する研究を続けたいと思っていたところ、Sc をアルミニウムの中に 0.2 重量% の少量添加するだけでアルミニウムの強度が著しく上昇することを知り、以来 Sc 添加アルミニウム合金の時効硬化及び析出挙動に関する研究を続けている。現在筆者の研究テーマの一つとして Al-Cu-Sc 合金の時効析出に関する研究に力を入れて研究している。一連の研究でこの合金を 573 K 付近で時効熱処理すると、 θ' -Al₂Cu と Al₃Sc が析出し、これらの析出物は原子配列的に Al マトリックスと整合性を有し、なおかつ析出物と Al マ

トリックス界面に整合歪みが存在するので、その整合歪みを打ち消すように、双方の析出物が他の析出物上に不均一析出することを予想した。検討の結果、興味ある結果が得られたので、これをこのまま置いておく手はない。国際会議で発表したいとの衝動にかられ、今回の国際会議参加となったわけである。研究発表の内容の詳細については、あまりにも専門的過ぎるのでここでは省略する。

Sc 添加アルミニウム合金の時効硬化に関してはロシアでかなり研究されている。筆者は Sc 添加アルミニウム合金の研究論文別刷をロシアの研究者に送ってくれるよう手紙を書いたところ、その研究者から数通の論文別刷が送られてきた。ロシア語で書かれているので、日露辞典をひも解きながら文章を訳したことがある。最近彼等が著わした英語で書かれた「Advanced Aluminum Alloys Containing Scandium -Structure and Properties-」という題目の厚表紙の書物を手に入れたが、この中に筆者らが発表した研究がいくつか紹介・引用されている。これらの引用文献は国際会議で発表した論文からのものである。これを見ると、国際会議で発表したからこそ、このように世界の研究者に筆者らの研究結果が興味を持たれて、引用されているのだなど

いうことがつくづく感じられるのである。アルミニウムに多くの利点をもたらす Sc が注目されはじめ、国内外で多くの研究者が研究を始めたのはうれしいかぎりである。今後とも機会があれば、国際会議で研究発表を続けて行きたいと思っている。

5. おわりに

ICAA-7 の論文アブストラクトの締切りが1999年7月1日、発表論文の締切りが12月1日でその間5か月もあると思っていたら、あっという間に12月の締切り日が迫ってきて、何とか6ページの英語論文を完成し、ICAA-7 事務局へ送付した。4月の発表まで少しの間ゆっくりできるなと思っていると、2月から3月にかけては学年末で忙しくなり、その合間に縫っての国際会議の発表の準備で4月の国際会議があっという間に来てしまったという感じであった。第8回のアルミニウム合金国際会議（ICAA-8）は2002年にイギリスで開催予定である。できれば参加したいと思っている。

参考文献

- 1) 中山 勝：久留米工業高等専門学校紀要、第11巻第2号、(1996), 66。

平成12年度 編集委員

委員長 柳 謙一 校長
副委員長 杠 顯一郎 教授(数学)
藤 道治 教授(応化)
委員 今井良一 教授(機械)
大淵 豊 教授(電気)
松本 健一 教授(制御情報)
本田 義興 助教授(材料)
宮本 泉 助教授(物理・化学)
天藤 勝 教授(外国語)
小宮 厚 助教授(国語・人文)
木寺 英史 助教授(体育)

平成13年3月9日印刷

平成13年3月15日発行

紀要 第16巻 第2号

〒830-8555 久留米市小森野一丁目1番1号

編集兼著 久留米工業高等専門学校

TEL 0942-35-9300

〒815-0035 福岡市南区向野2丁目13-29

印刷所 秀巧社印刷株式会社

MEMOIRS
OF
KURUME NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY

Vol. 16 No. 2
(MARCH 2001)

CONTENTS

Complex Stress Functions of an Infinite Plate which surrounds an Elliptical Plate and is subjected to In-Plane Loads at infinity	{Ryoichi IMAI Shinji HASHIMURA ...	1
Gear Tooth Profile Error caused by Hob Tooth Error or Hob Misalignment	{Yasuaki HIROO Koichi FUKUDA ... Isao SAKURAGI	7
Remote Control of Industrial Robot Arm Using the Internet	Naruto EGASHIRA ...	13
The Rate of Ion-Pair Return in the Solvolysis of 1-(4-Methylphenyl)ethyl Pentafluorobenzoate ...	{Yutaka TSUJI Masahiko EGASHIRA ... Takashi KURIHARA Masayuki NISHIDA	19
A Shooting Method by Applying Hermite Approximation for Solving a Type of Non-Linear Boundary Value Problems	Kenichirou YUZURIHA ...	25
On Gun (郡) of Kaga (加賀) in the Sengoku (戦国) Period	Hajime MATSUO ...	33
A Study of DATOTSU Movement in KENDO (2) —‘Action of Diagonal’ and ‘Nanba’—	Eishi KIDERAW ...	41
Simulation of Electron Trajectories with the Aid of Computer Program, “EXCEL” (Part II) —When the Space Charge Effect is considered—	Kinzo SUGIMORI ...	47
Report on the 7th International Conference on Aluminum Alloys (ICAA-7)	Masaru NAKAYAMA ...	53