

## 一般論文

## 小さな球体を囲む大きな棒の引張問題に対する調和関数を用いた解析

今 井 良 一<sup>\*1</sup>  
 橋 村 真 治<sup>\*1</sup>  
 中 尾 哲 也<sup>\*1</sup>  
 飯 干 拓 哉<sup>\*2</sup>  
 井 上 慎 介<sup>\*3</sup>

Harmonic Functions Analysis of Displacements and Stresses  
 of a Bar and a Spherical Body under the Tensile Load

Ryoichi IMAI<sup>\*1</sup>  
 Shinji HASHIMURA<sup>\*1</sup>  
 Tethuya NAKAO<sup>\*1</sup>  
 Takuya IHOSHI<sup>\*2</sup>  
 Shinsuke INOUE<sup>\*3</sup>

A bar and a spherical body bonded together. The material of the former is different from the material of the latter. Displacements are given by series of harmonic functions. Coefficients of the series are determined by satisfying boundary conditions. Stress distributions are calculated and shown in a spherical body and a bar under the tensile load.

## 1. 緒 言

著者の一人は先に、3次元弾性問題解析において、調和関数が有効であることを説明し調和関数を用いる解析方法<sup>1)</sup>を提案した。

先の報告に基づいて、具体的な3次元弾性問題として、小さな球体を囲む大きな棒の引張問題を解析する。この問題を取り上げた背景は、次の1)から4)である。

- 1) 2次元弾性問題として解析した小さな円板を囲む大きな板の引張問題<sup>2)</sup>を3次元弾性問題へ拡張する。
- 2) 実用的な工業材料すなわち介在物を含む鋼材の力学的な特性に参考となる。
- 3) 応力場解析問題として基礎的なものである。
- 4) Goodier<sup>3)</sup>は同じ問題を研究しているが、応力分布の資料、変位を表示する関数の決定などについて本研究と異なる点がある。

## 2. 基礎理論

先の報告<sup>1)</sup>によれば、3次元弾性体の変位成分  $u, v, w$  は、調和関数群  $(F_0, F_1, F_2, F_3)$  を用いて次式のように表示できる。

$$\begin{aligned} u &= F_1 - \alpha / x (F_0 + xF_1 + yF_2 + zF_3), \\ v &= F_2 - \alpha / y (F_0 + xF_1 + yF_2 + zF_3), \\ w &= F_3 - \alpha / z (F_0 + xF_1 + yF_2 + zF_3), \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $\nu$  は材料のポアソン比で  $\nu = 0.25 / (1 - \nu)$  である。

垂直ひずみ  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 、せん断ひずみ  $\gamma_{xy}, \gamma_{yx}, \gamma_{yz}, \gamma_{zy}, \gamma_{zx}, \gamma_{xz}$  は、変位成分で次のように表示できる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u / x, \varepsilon_y = v / y, \varepsilon_z = w / z, \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = u / y + v / x, \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = v / z + w / y, \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = u / z + w / x \end{aligned} \quad (2)$$

垂直応力  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 、せん断応力  $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$  は、式(2)のひずみ成分で次のように表示できる。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x, \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \tau_{yx} = G\gamma_{yx}, \\ \sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y, \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \tau_{zy} = G\gamma_{zy}, \\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z, \tau_{zx} = G\gamma_{zx}, \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \end{aligned}$$

材料の縦弾性係数を  $E$ 、横弾性係数を  $G$ 、ポアソ

\*1 久留米工業高等専門学校機械工学科

\*2 西日本旅客鉄道(株)

\*3(株)日産ディーゼル技術研究所

Copyright 2003 久留米工業高等専門学校

ン比を $\nu$ とすれば,  $E=2G(1+\nu), \lambda(1+\nu)(1-2\nu)=\nu E$ である。(3)

表面力  $p_x, p_y, p_z$  は, 応力成分で次のように表示できる。

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (4)$$

ただし,  $(l, m, n)$  は面の法単位ベクトルである。

以上の説明から, 3次元弾性問題を解決するには, モデルに適した変位成分を得ればよい。この考えに基づき以下に変位成分を得る手順や得た結果を説明する。

### 3. モデルの特徴と特定の条件

モデルの特徴は, 次のようなものである。

小さな球体も大きな棒も 3次元の弾性体である。

作用する荷重は, 棒軸方向の引張荷重という単純なものであるが, 生ずる応力成分, ひずみ成分, 変成分は全て 3次元的に変化する。

小さな球体の材料と大きな棒の材料は異なる。

小さな球体(半径  $a$ )の寸法は, 大きな棒の寸法に比べて非常に小さい。

小さな球体を大きな棒はとり囲んでおり, 棒の中心に小さな球体は位置する。

両者は, 小さな球体の外周で密着している。

形状・寸法ならびに荷重について対象性があるので変位成分, 応力成分にも対象性がある。

特定の条件としては, 大きな棒の軸方向に引張荷重が作用するので, 大きな棒の外周付近では一様な応力分布である。

小さな球体の外周で変位は連続的に変化するのので, 小さな球体と大きな棒の変位はそこでは等しい。

小さな球体の外周で小さな球体と大きな棒の表面力は, 互いに異符号である。

### 4. 調和関数の選定と変位の表示

モデルの特徴ならびに特定の条件を考慮し, 力学的な量を図や数式で表示する要領を以下に説明する。

モデルを図 1 に示す。球体を領域 1 とし, 大きな棒を領域 2 とするので, 二つの領域の量にはそれぞれ添字 1, 2 をつける。

図 1 での矢印は荷重を示している。荷重は, 軸方

向の引張荷重  $T(\text{kg/mm}^2) = \text{一定}$  である。

使用する座標系を図 2 に示す。

球体の中心と座標系の原点は一致させている。棒軸を  $z$  軸とし,  $x, y$  軸はそれぞれ棒の側面に対し垂直にした。点  $P$  から  $xy$  平面に下ろした垂線は  $PH$  である。

調和関数を表示するため必要に応じ Legendre 関数  $P_n^m(\theta)$ <sup>4)</sup> を使用する。

1) 球体の中心で 3 個の変位成分は 0 とする。

2) 2次元問題で円板内の応力分布は一様であった<sup>2)</sup>。

これら 1), 2) を考慮したので, 球体に対する調和関数と変位成分は,

$$F_0 = e_1 r^2 P_2^0(\theta), F_1 = f_1 x, F_2 = g_1 y, F_3 = h_1 z, u_1 = f_1(1-2\alpha)x + \alpha e_1 x, v_1 = g_1(1-2\alpha)y + \alpha e_1 y, w_1 = h_1(1-2\alpha)z - 2\alpha e_1 z. \quad (5)$$

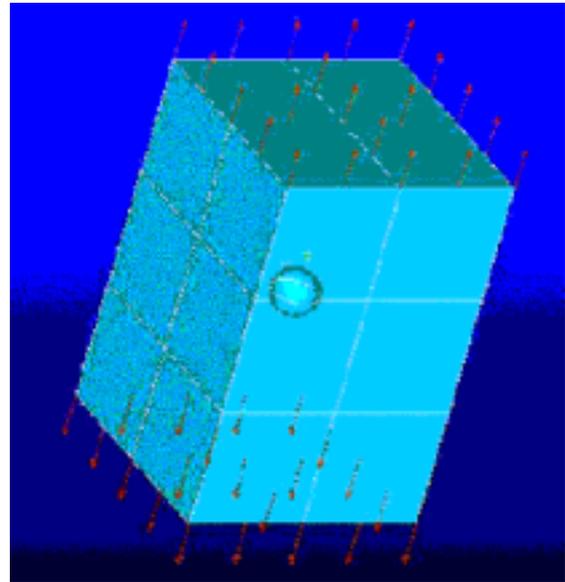


図 1 モデルと荷重状態

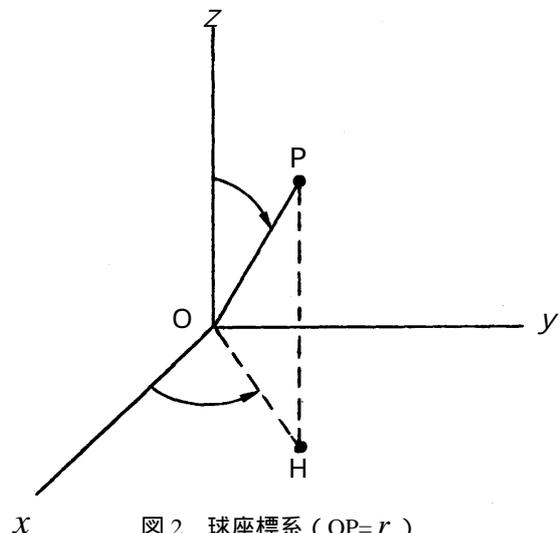


図 2 球座標系 ( $OP=r$ )

大きな棒に対しては,

$$\begin{aligned}
 F_0 &= e_2 r^3 P_2^0(\theta), F_1 = f_2 r^2 \cos P_1^1(\theta), \\
 F_2 &= g_2 r^2 \sin \phi P_1^1(\theta), F_3 = h_2 r^2 P_1^0(\theta), \\
 u_2 &= -v T x / E_2 + F_1 - \alpha / x(F_0 + x F_1 + y F_2 + z F_3), \\
 v_2 &= -v T y / E_2 + F_2 - \alpha / y(F_0 + x F_1 + y F_2 + z F_3), \\
 w_2 &= T z / E_2 + F_3 - \alpha / z(F_0 + x F_1 + y F_2 + z F_3). \quad (6)
 \end{aligned}$$

変位成分  $u_2, v_2, w_2$  の第1項は,  $\sigma_{z2}=T$  で他の応力成分はすべて 0 であるような状態を表す。式(5)・(6)に作用する微分オペレータ<sup>5)</sup>としては,

$$\begin{aligned}
 / x &= A_{11} / r + A_{12}/r / \theta + A_{13}/r \sin \theta / \phi, \\
 / y &= A_{21} / r + A_{22}/r / \theta + A_{23}/r \sin \theta / \phi, \\
 / z &= A_{31} / r + A_{32}/r / \theta,
 \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \sin \theta \cos \phi, A_{12} = \cos \theta \cos \phi, A_{13} = -\sin \phi, \\
 A_{21} &= \sin \theta \sin \phi, A_{22} = \cos \theta \sin \phi, A_{23} = \cos \phi, \\
 A_{31} &= \cos \theta, A_{32} = -\sin \theta. \quad (7)
 \end{aligned}$$

モデルには, 特定の条件(境界条件など)が存在するので, この条件をできるだけ正確に満足させる。

モデルに対する特定の条件を境界条件 BC1-3 で表示する。

そしてこれらを満足させることについて以下に説明する。

BC1: 大きな棒の外周近傍での応力分布は, 普通の棒が引張荷重を受ける時の分布と同じである。

この BC1 は, 原点から遠く離れた箇所(外周近傍)で大きな棒の変位成分の第2項以降の部分が 0 になることから満たされる(式(6))。

BC2: 小さな球体と大きな棒が接触する境界面で

両者は密着しているため, ここで両者の変位成分は互いに等しい。

BC3: 小さな球体と大きな棒が接触する境界面で両者は密着しているため, 両者の表面力成分は互いに異符号である。

境界条件 BC2 と BC3 を数式で表示すれば, 次のとおりである。

$$\begin{aligned}
 \text{境界面: } r &= a, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\
 \text{error}_1(a, \theta, \phi) &= u_1 - u_2 = 0, \text{error}_2(a, \theta, \phi) = v_1 - v_2 = 0, \\
 \text{error}_3(a, \theta, \phi) &= w_1 - w_2 = 0, \text{error}_4(a, \theta, \phi) = P x_1 + P x_2 = 0, \\
 \text{error}_5(a, \theta, \phi) &= P y_1 + P y_2 = 0, \\
 \text{error}_6(a, \theta, \phi) &= P z_1 + P z_2 = 0 \quad (8)
 \end{aligned}$$

式(8)の  $\text{error}_1$  から  $\text{error}_6$  にはそれぞれ8個の未定係数  $e_1$  から  $h_2$  が含まれている。そして, 各  $\text{error}_i$  を厳密に 0 にすることも容易ではない。そこで, 誤差の2乗  $\text{error}_i^2$  を球面で積分した値の総和を最小にしようとした。すなわち最小2乗法的方法<sup>6)7)</sup>で未定の係数  $e_1$  から  $h_2$  を決定した。決定するための方程式は, 係数  $e_1$  から  $h_2$  を未知数とする8元の連立方程式となる。この連立方程式において, 係数  $a_{ij}$  は調和関数群から得られる関数同士の積, 右辺  $b_j$  は関数と既知量の積をそれぞれ球体の球面で積分した値になる。積分値は, Simpson の数値積分公式<sup>8)</sup>により球面の8分の1で計算した。これらの数値計算処理は, パソコン・フォートラン言語プログラムで処理した。

## 5. 計算結果と考察

### 5.1 展開係数の値

表1 縦弾性係数の比  $E_1/E_2$  が変化する過程での展開係数の値(大きな棒の縦弾性係数  $E_2=2.1 \times 10^4 \text{kg/mm}^2$ , 球体と大きな棒のポアソン比  $\nu_1=\nu_2=\nu=0.3$ , 式(5)と(6)参照)

$E_1/E_2$	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
$f_1, g_1 \times 10^4/T$	0.48595	4.70987	0.17123	-0.63169	-0.95792	0.39076
$h_1 \times 10^4/T$	-0.30523	-8.70903	0.41842	2.08207	2.80192	0.18399
$e_1 \times 10^4/T$	-0.78876	-4.18505	-0.57268	0.04959	0.28890	-0.81347
$f_2, g_2 \times a^{-3} 10^4/T$	$2 \times 10^{-6}$	-0.01136	-0.02380	-0.03748	-0.05258	-0.06931
$h_2 \times a^{-3} 10^4/T$	$-3 \times 10^{-6}$	0.03197	0.06743	0.10697	0.15134	0.20153
$e_2 \times a^{-5} 10^4/T$	$2 \times 10^{-6}$	-0.01733	-0.03649	-0.05778	-0.08157	-0.10833
$E_1/E_2$	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	0.0
$f_1, g_1 \times 10^4/T$	4.25279	-1.25454	-0.94203	-0.61232	-0.42286	0
$h_1 \times 10^4/T$	-7.44497	3.68554	3.20481	2.73001	2.59572	0
$e_1 \times 10^4/T$	-3.92830	0.45069	0.17249	-0.11983	-0.29809	0
$f_2, g_2 \times a^{-3} 10^4/T$	-0.08791	-0.10867	-0.13188	-0.15781	-0.18661	-0.18661
$h_2 \times a^{-3} 10^4/T$	0.25875	0.32467	0.40147	0.49220	0.60129	0.60129
$e_2 \times a^{-5} 10^4/T$	-0.13866	-0.17334	-0.21334	-0.26001	-0.31516	-0.31516

球体と大きな棒の縦弾性係数の比が 1.0 から 0.0 へ変化する過程での展開係数を表 1 に示す。

表 1 の展開係数について 次の 1) から 3) がいえる。

1) 比  $E_1/E_2$  は単調な変化をしているが、展開係数の値は複雑な変化をする。このことは、2次元の場合<sup>2)</sup>とは異なる。

2) 比  $E_1/E_2=1.0$  の状態は、球体と棒は同一の鋼材であり、両者で単純な棒になる状態である。この状態は 1 つの特殊な状態である。この状態では、展開係数  $f_2, g_2, h_2, e_2$  は他の場合に比べ微小でほぼ 0 である。さらに、

$$\begin{aligned} u_1 &= (1-2\alpha)f_1x + \alpha e_1x = -0.14286 \cdot 10^{-4}Tx = u_2 \text{ の第 1 項} \\ v_1 &= (1-2\alpha)g_1y + \alpha e_1y = -0.14286 \cdot 10^{-4}Ty = v_2 \text{ の第 1 項} \\ w_1 &= (1-2\alpha)h_1z - 2\alpha e_1z = 0.47619 \cdot 10^{-4}Tz = w_2 \text{ の第 1 項} \end{aligned} \quad (9)$$

となっているので(式(5),(6)参照),満足できる結果である。

3) 比  $E_1/E_2=0.0$  の状態は、球体が球状穴となった状態で、棒は球状穴の切欠きをもつことになる。比  $E_1/E_2=1.0$  の状態と同様、この状態も 1 つの特殊な状態である。したがって、次の 2 通りで計算した。

1 通り目: 2次元の場合を参考にすると展開係数  $f_1, g_1, h_1, e_1$  は 0 になると推測されたので、連立方程式を解いて展開係数  $f_1, g_1, h_1, e_1$  が 0 になると推測した。しかし、推測は成り立たなかった。ただし、球状穴内での縦弾性係数  $E_1 = 0$  であるので、応力成分はすべて 0 にはなる(式(3)参照)。

2 通り目: 展開係数  $f_1, g_1, h_1, e_1$  をすべて 0 にする。すなわち未知数は展開係数  $f_2, g_2, h_2, e_2$  の 4 個とした。展開係数  $f_2, g_2, h_2, e_2$  は 2 通りでそれぞれ等しい。

表 2 球面の一部 ( $r=a, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq \pi/2$ ) での変位 ( $E_1/E_2=0.5$  の場合)

$$\begin{aligned} u_1/x &= -0.17888 \cdot 10^{-4}T, v_1/y = -0.17888 \cdot 10^{-4}T, w_1/z = 0.63362 \cdot 10^{-4}T \\ u_2/x &= -0.17888 \cdot 10^{-4}T, v_2/y = -0.17888 \cdot 10^{-4}T, w_2/z = 0.63362 \cdot 10^{-4}T \end{aligned}$$

ただし、 $x, y, z$  は球面上での値で  $x=asin\theta\cos\phi, y=asin\theta\sin\phi, z=acos\theta, E_1/E_2=0.5$  .

表 3 球面の一部での表面力の値 ( $E_1=0, r=a, \theta = \pi/2, \phi = 0$  から  $\pi/2$ )

$$P_{x1}=0, P_{y1}=0, P_{z1}=0, P_{x2} \text{ は } -67X10^{-6} \text{ 位, } P_{y2} \text{ は } -57X10^{-6} \text{ 位, } P_{z2} \text{ は } 37X10^{-11} \text{ 位である。}$$

表 4  $E_1/E_2=0$  の状態での応力  $\sigma_{z2}(r, \theta=\pi/2, \phi=0)$  の分布 (数値は  $\sigma_{z2}/T$  の数値である。)

r/a	1.0000	1.5000	2.0000	2.5000	3.0000	3.5000	4.0000	4.5000	5.0000	5.5000
本法	2.0455	1.1751	1.0540	1.0229	1.0118	1.0069	1.0044	1.0029	1.0021	1.0015
文献 10)	2.0455	1.1751	1.0540	1.0229	1.0118	1.0069	1.0044	1.0029	1.0021	1.0015

## 5.2 境界条件の満足度

表 2 からは変位型境界条件について、表 3 からは荷重型境界条件についての満足度がわかる。

## 5.3 応力分布

応力分布についての結果は、表 4, 5, 図 3 に示す。機械工学の立場から最も重要な応力成分  $\sigma_{z2}$  の分布を表 4 に示す。本法と文献 10) における  $\sigma_{z2}/T$  の数値をそれぞれ示した。文献 10) では次のように示されている。

$$\sigma_{z2}(r, \theta=\pi/2, \phi=0) = T \left[ 1 + \left\{ \frac{(4-5\nu)a^3}{2(7-5\nu)r^3} + 9a^5 \left\{ \frac{2(7-5\nu)}{r^5} \right\} \right\} \right] \quad (10)$$

材料力学の立場から最も重要な応力成分  $\sigma_z$  の分布を図 3 に示す。応力成分  $\sigma_z$  の分布については FEM による結果<sup>9)</sup>も示している。

図 3 の応力分布から、次のようなことがいえる。

1) 本報の結果と FEM による結果は互いによくにている。このことは、式(5),(6)の設定が妥当である。ならびにモデルの特定の条件がよく満たされている(表 2, 3 参照)からであろう。

2) 球体内では、一様な分布である。しかし、大きな棒内の分布は複雑である。特に、球体に接触する近傍では応力集中状態である。このような応力分布の特徴は、微小な円板を囲む大きな板の引張問題<sup>2)</sup>でも見られた。

ここまで説明したことを考慮すると 2次元問題で得た成果<sup>2)6)11)</sup>の一部は、3次元問題にも適用できると考える。

## 6. 結 論

小さな球体を囲む大きな棒の引張問題に対し、3次元弾性解析を行い、その解析結果を示した。弾性解析を行うにあたり、調和関数が有効である、

FORTRAN - パソコンによる数値計算処理が有効であることなどが確認できた。

参 考 文 献

- 1) 今井：久留米高専紀要，第18巻第1号,(2002),15。
- 2) 今井・奥園：久留米高専紀要，第6巻第2号,(1991),1。

- 3) J.N.Goodier,APM-55-7,(1933),39。
- 4) 森口ほか2名：数学公式 III，(1960),131，岩波書店。
- 5) 竹内：大学演習弾性論,(1970),3,34，裳華房。
- 6) 石田ほか2名：機論,45-395,(1979),743。
- 7) I.S.Sokolnikoff・R.M.Redheffer :Mathematics of physics and modern engineering,(1958),247,Kogakusha Company

表5 棒軸方向の垂直応力  $\sigma_z$  と荷重 T の比の数値表 ( 垂直応力  $\sigma_z$  の分布, 球体の半径  $a=10.0\text{mm}$  とした場合, 文献 9) における結果を FEM とした。)

FEM			
原点からの距離 (mm)	$E_1/E_2=1.0$	0.5	0.0
0	1.00000	0.66240	9.77E-05
1	1.00000	0.66240	9.77E-05
2	1.00000	0.66239	9.77E-05
3	1.00000	0.66239	9.77E-05
4	1.00000	0.66239	9.78E-05
5	1.00000	0.66238	9.78E-05
6	1.00000	0.66241	9.79E-05
7	1.00000	0.66238	9.80E-05
8	1.00000	0.66243	9.82E-05
9	1.00000	0.66243	9.86E-05
10	1.00000	0.66480	1.03E-04
10	1.00000	1.3224	1.9873
15	1.00000	1.0591	1.1810
20	0.99999	1.0209	1.0649
25	1.00000	1.0111	1.0344
30	1.00000	1.0069	1.0214
35	1.00000	1.0046	1.0145
40	1.00000	1.0037	1.0114
45	1.00000	1.0030	1.0094
50	1.00000	1.0025	1.0079

本法			
原点からの距離 (mm)	$E_1/E_2=1.0$	0.5	0.0
0	1.00000	0.6789	0.0000
1	1.00000	0.6789	0.0000
2	1.00000	0.6789	0.0000
3	1.00000	0.6789	0.0000
4	1.00000	0.6789	0.0000
5	1.00000	0.6789	0.0000
6	1.00000	0.6789	0.0000
7	1.00000	0.6789	0.0000
8	1.00000	0.6789	0.0000
9	1.00000	0.6789	0.0000
10	1.00000	0.6789	0.0000
10	1.00000	1.3481	2.0455
15	1.00000	1.0568	1.1751
20	1.00000	1.0171	1.0540
25	1.00000	1.0072	1.0229
30	1.00000	1.0036	1.0118
35	1.00000	1.0021	1.0069
40	1.00000	1.0013	1.0044
45	1.00000	1.0009	1.0029
50	1.00000	1.0006	1.0021

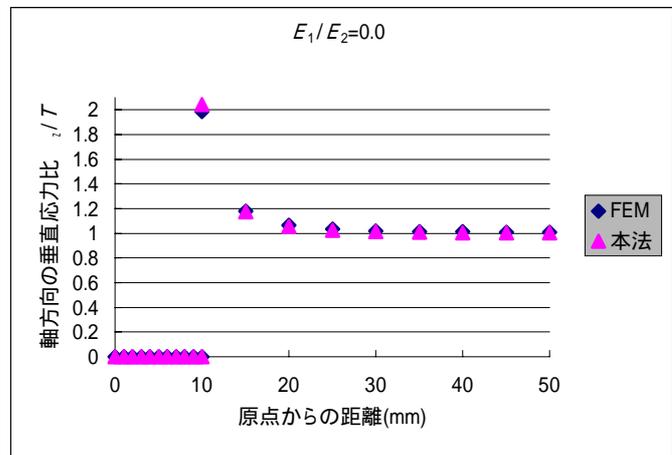
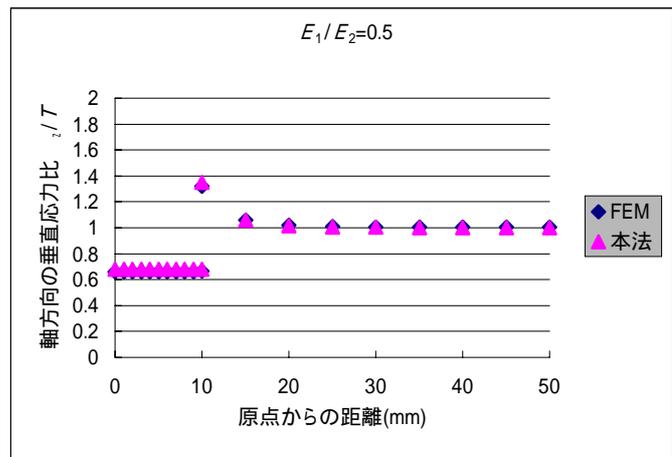
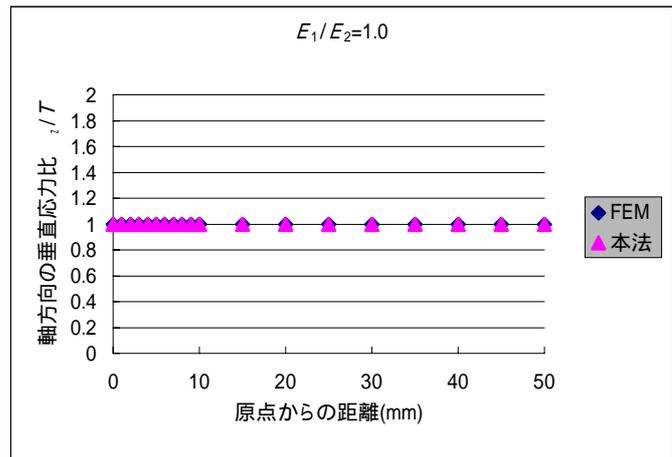


図 3 x 軸上における応力分布の変化(文献 9)における結果を FEM とした。)

